

# „Der Wendepunkt der Kurve ist der Hochpunkt“

Kurvendiskussion an individuellen Vorstellungen orientiert

Florian Karsten

**Dieser Beitrag gibt einen Einblick in den Mathematikunterricht einer 11. Gymnasialklasse zum Thema „Kurvendiskussion“: Der hier vorgestellte Unterricht wird durch drei Hauptmerkmale charakterisiert: Die Kurvendiskussion wird nicht als Untersuchung einer einzigen Funktion angelegt, sondern als Mittel zur Klassifikation vieler Funktionen nach bestimmten Eigenschaften. Der Unterrichtsgang orientiert sich an den Vorstellungen und Präkonzepten der Lernenden. Außerdem werden mehrfach Ansätze des dialogischen Unterrichts verwendet, insbesondere, um durch die Verschriftlichung der Lernwege Einblick in die individuellen Vorstellungen zu erhalten.**

Kurvendiskussionen frustrieren viele Schülerinnen und Schüler: Sie arbeiten mechanisch Regeln ab, die sie nicht verstehen. Sie lernen Begriffe wie Vokabeln, ohne sie in Bilder oder normale Sprache übersetzen zu können. Vor allem aber verstehen sie den Sinn der Kurvendiskussion im Mathematikunterricht nicht.

Dieser Sinn darf nicht im alleinigen Einüben technischer Rechenfertigkeiten bestehen, wenn die Lernenden hierbei kein inhaltliches Verständnis aufbauen. Gerade aus Sicht der Didaktik geht es um einen verständnisorientierten Zugang, den Aufbau inhaltlicher Vorstellungen und eine Orientierung an den Vorstellungen der Lernenden. Als sinnvolles Ziel der Kurvendis-

kussion formulieren Hahn und Prediger (2008) beispielsweise: „*Bestand und Änderung, Extrem- und Wendepunkte als mathematische Konzepte zur Erfassung und Beschreibung der charakteristischen Momente von Wachstums- und Veränderungsprozessen zu begreifen und aktivieren zu können.*“

Im Folgenden wird ein vorwiegend innermathematischer Unterrichtsgang einer 11. Klasse eines neunjährigen Gymnasiums beschrieben. Ich habe dabei versucht, die oben genannten Frustrationen dadurch zu vermeiden, dass ich den Unterricht stark an den Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler orientiert habe. Den Anstoß dafür gaben drei persönliche Erfahrungen:

- Im Studium habe ich die Kurvendiskussion als Paradebeispiel für mathematische Begriffsbildung kennengelernt. Dadurch steht nicht mehr die Kurvendiskussion *einer* Funktion im Vordergrund, sondern die Klassifikation *vieler* Funktionen nach bestimmten Eigenschaften.
- Der dialogische Unterricht hat mir – insbesondere durch die Verschriftlichung der Lernwege – die Möglichkeit eröffnet, den Lernenden beim Nachdenken über Mathematik zuschauen zu können und dadurch von ihnen auch zu lernen.
- Die Orientierung an individuellen Vorstellungen war mir im Rahmen des Physikunterrichts immer wieder eine große Hilfe dabei, besser zu verstehen, wo Lernende Schwierigkeiten haben.

In der Physik sind mit Schülervorstellungen (sogenannten Präkonzepten) Alltagserfahrungen und Vorstellungen zu Phänomenen und Prinzipien gemeint, mit denen die Lernenden in den Physikunterricht kommen, die aber den physikalischen Konzepten oft widersprechen (Müller/Wodzinski/Hopf 2004). Diese (Fehl-)Vorstellungen verhindern das Lernen neuer physikalischer Sachverhalte, wenn die Lernenden diese Sachverhalte nicht mit ihren fest verankerten Präkonzepten vereinbaren können. Damit der Physikunterricht funktionieren kann, muss sich die Lehrkraft solcher Präkonzepte nicht nur bewusst sein, sondern sie muss diese auch von den Schülerinnen und Schülern aktiv erfragen, den Unterricht daran anknüpfen und zusammen mit den Lernenden den Konzeptwechsel (conceptual change), weg von den vorhandenen Vorstellungen, hin zu physikalischen Vorstellungen, angehen (Duit 1993).

Dass diese Sicht auch für die Mathematikdidaktik instruktiv sein kann, wird im Einführungsartikel dieses Heftes dargestellt und liegt auch diesem Artikel als Ausgangspunkt zugrunde. Konkret waren mit dem hier vorgestellten Unterrichtsgang folgende Hoffnungen und Ziele verbunden:

- Die Lernenden verstehen, wie man Bilder, innermathematische Sprache und Formeln ineinander übersetzen kann, wenn man diese Übersetzungen in vielfältiger Weise anregt und den Lernenden genug Zeit dafür lässt.
- Die Eigenschaften der Funktionsgraphen werden dann nachvollziehbar, wenn die Lernenden diese selbst finden.
- Die Lernenden beginnen mit einer anschaulichen Funktionsuntersuchung, erfinden eigene Fachbegriffe, tauschen

## Die Entwicklung des Funktionsbegriffs

### 14. Jhdt.: Nicole Oresme (Bischof von Lisieux)

Grafische Veranschaulichung einer linearen Funktion; dabei Verwendung von Abszisse und Ordinate; Erkenntnis: Eine Funktion kann durch eine Kurve dargestellt werden.

### 17. Jhdt.: Gottfried Wilhelm von Leibniz

Erste Erwähnung des Wortes „functio“

### 18. Jhdt.: Johann Bernoulli (Erste Definition)

Man nennt „Funktion einer veränderlichen Größe“ einen Ausdruck, der auf irgendeine Weise aus der veränderlichen Größe und Konstanten zusammengesetzt ist.

### 19. Jhdt.: Lejeune Dirichlet

Steht eine Variable  $y$  so in Beziehung zu einer Variablen  $x$ , dass zu jedem numerischen Wert  $x$  gemäß einer Vorstellung ein eindeutiger Wert  $y$  gehört, so heißt  $y$  eine „Funktion der Variablen  $x$ “

### 20. Jhdt.: Nicolas Bourbaki

Eine linkstotale und rechtseindeutige Relation  $(f, A, B)$  heißt eine „Abbildung von  $A$  in  $B$ “ oder eine „Funktion von  $A$  in  $B$ “

**Kasten 1:** Folie zur historischen Entwicklung des Funktionsbegriffs

sich mit anderen über deren Nutzen aus und einigen sich erst am Ende auf Vokabeln, die für alle eine Hilfe sind.

Damit ist die Kurvendiskussion auf einer anschaulichen und sprachlichen Ebene möglich; die formale, rechnerische Kurvendiskussion erfolgt erst im Anschluss.

Um die Kurvendiskussion zu motivieren, wird dem Unterrichtsgang eine zentrale Frage vorangestellt, die sich auf den mathematischen Aspekt der Klassifikation

bezieht: Wie viele Funktionen gibt es? Natürlich könnte man diese einfach mit „unendlich viele“ beantworten. Versucht man sich aber an einer ausführlicheren Antwort, so stößt man schnell auf die weiterführende Frage, in welche Klassen man Funktionen einteilen kann (ganzrationale, exponentielle, ...) und welche Eigenschaften bei der Unterscheidung helfen (monoton, symmetrisch, ...). Die Suche nach einer Klassifikation liefert damit den Anstoß für viele neue Begriffe, Konzepte und Vorstellungen.

## Der Unterrichtsgang

Der Begriff der Funktion war den Lernenden bereits aus früheren Schuljahren bekannt. Einen ersten Eindruck seiner historischen Entwicklung kann eine Folie wie in *Kasten 1* ermöglichen. Dabei soll im Vordergrund stehen, dass sich der Funktionsbegriff über viele Jahrhunderte entwickelt und dadurch verändert hat.

Wenn das dialogische Lernen (vgl. Gallin) der Klasse unbekannt ist, kann eine Anleitung und Einführung wie in *Kasten 2* gegeben werden. Dabei ist zu betonen, dass die folgenden Aufträge jede einzelne Schülerin bzw. jeden einzelnen Schüler herausfordern sollen, selbstständig über Mathematik nachzudenken.

Die Kurvendiskussion ist mit einer Unmenge an Fachbegriffen verbunden, deren Sinn meist erst im Rückblick verstanden wird. So wird die zweite Ableitung erst im Zusammenhang mit dem Krümmungsverhalten wirklich interessant. Und auch Steigung, Stetigkeit und Monotonie ergeben für viele Lernende erst bei den Kriterien für Extrem- und Wendestellen einen Sinn.

Der Unterrichtsgang begann mit einem „Spiel“, bei dem sich in der Klasse Dreier-teams gegenseitig Funktionsgraphen „diktiert“, also mit eigenen Worten beschrieben haben. Die Lernenden erhielten kleine Kärtchen mit Graphen, vgl. *Abb. 1*, und sollten sich diese gegenseitig so gut beschreiben, dass die nachzeichnende Person den Graphen zeichnen konnte, ohne das Original zu sehen. Ein möglicher Arbeitsauftrag ist in *Kasten 3* zu finden. Der Sinn dabei ist das Erfinden eigener Vokabeln, die Eigenschaften und besondere Punkte von Schaubildern charakterisieren. Die mathematische Sprache entwickelt sich also beim Sprechen als Hilfe, Vereinfachung und Präzisierung. Lernende sind durchaus in der Lage, selbstständig mathematische Begriffe zu erfinden, und nicht nur in von der Lehrkraft vorgegebenen Portionen zu entdecken (vgl. Hußmann 2001).

Grundsätzlich kann das Spiel „Funktionen diktieren“ auch mit Funktionsgraphen gespielt werden, die von den Lernenden selbst erfunden wurden. Es hat sich jedoch gezeigt, dass diese Graphen oft nicht alle Eigenschaften aufweisen. So fehlen dann Symmetrien, Unstetigkeiten oder Asymptoten, weil sich die Lernenden nur an bekannten, einfachen Beispielen aus zurückliegenden Klassenstufen orientieren.

Der nächste, zweite Arbeitsauftrag (vgl. *Kasten 4*) diente dazu, dass sich jede Schülerin bzw. jeder Schüler selbstständig – also zum Beispiel als Hausaufgabe oder in Ein-

### Informationen zum Experiment

Dieses Experiment ist nicht dazu gedacht, Sie zu quälen, sondern Sie herauszufordern, selbstständig über Mathematik nachzudenken. Daher sollen Sie möglichst allein an den Aufträgen arbeiten und sich nur zur Not (wenn Sie gar nicht mehr allein weiterkommen würden) mit den anderen austauschen. Das bedeutet auch, dass alles vielleicht etwas langsamer voran geht als gewöhnlich; aber ich hoffe, dass dafür mehr im Gedächtnis bleibt – das spart langfristig natürlich viel Zeit und Arbeit.

Sie sollen also die Aufträge bearbeiten und dabei eine eigene Heftaufzeichnung verfassen! Diese Aufzeichnung werde ich und/oder Ihre Mitschülerinnen und Mitschüler lesen und evtl. korrigieren.

*Beim Schreiben verlangsamen und klären sich die Gefühle und Gedanken, nehmen Gestalt an und fordern zur Stellungnahme heraus. Wer schreibt, übernimmt in besonderer Weise Verantwortung für seine Position, öffnet sich der Kritik.*

#### Wie fertigt man sinnvolle und gut lesbare Aufzeichnungen an?

Damit andere – und auch Sie selbst als wichtigster Leser – im Nachhinein Ihre Gedankengänge nachvollziehen können, sollten Sie ein paar grundsätzliche Regeln beherzigen:

1. Geben Sie Ihren Aufzeichnungen eine klare Struktur:
  - Datum und zentrale Frage aufschreiben;
  - Zwischenüberschriften: „Übungsaufgaben“, „Skizzen“, „Vorüberlegungen“, „Einige Gedanken zum Thema“, „Zusammenfassung“ ... ;
  - wichtige Erkenntnisse und Endergebnisse einrahmen oder auf andere Art hervorheben;
  - für spätere Anmerkungen und Ergänzungen eine andere Farbe verwenden, und evtl. schon vorher genügend Platz dafür lassen.
2. Schreiben Sie leserlich und übersichtlich. (Das ist besonders wichtig!)
3. Lassen Sie einen Rand für Anmerkungen und Korrekturen frei.
4. Formulieren Sie möglichst klar und eindeutig:
  - Lieber zu ausführlich als zu knapp;
  - lieber kleinschrittig als zu viele Gedankensprünge;
  - wenn möglich, Gedanken immer durch Skizzen oder Bilder ergänzen.

#### Wie korrigiert man Texte von Mitschülerinnen und Mitschülern?

Da Sie die Texte Ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler meist nicht auf inhaltliche Richtigkeit überprüfen können, könnten Sie nach folgenden Gesichtspunkten vorgehen und am Rand (mit Bleistift) Anmerkungen aufschreiben:

- Finden Sie im Text **schnell** die Stellen, die Sie für interessant oder wichtig halten?
- Warum ja? Warum nicht? – Haben Sie einen eigenen Vorschlag?
- Wo konnten Sie den Ausführungen gut folgen und warum?
- Wenn Sie etwas nicht verstehen, notieren Sie Ihre Fragen am Rand.
- Welche Gedanken interessieren Sie besonders? Was fanden Sie besonders gelungen? Was war am Text besonders gut? Was ist verbesserungsbedürftig? – Warum?
- Ist der Gesamteindruck eher positiv oder eher negativ? – Warum?

**Kasten 2:** Informationsblatt zur Arbeitsweise

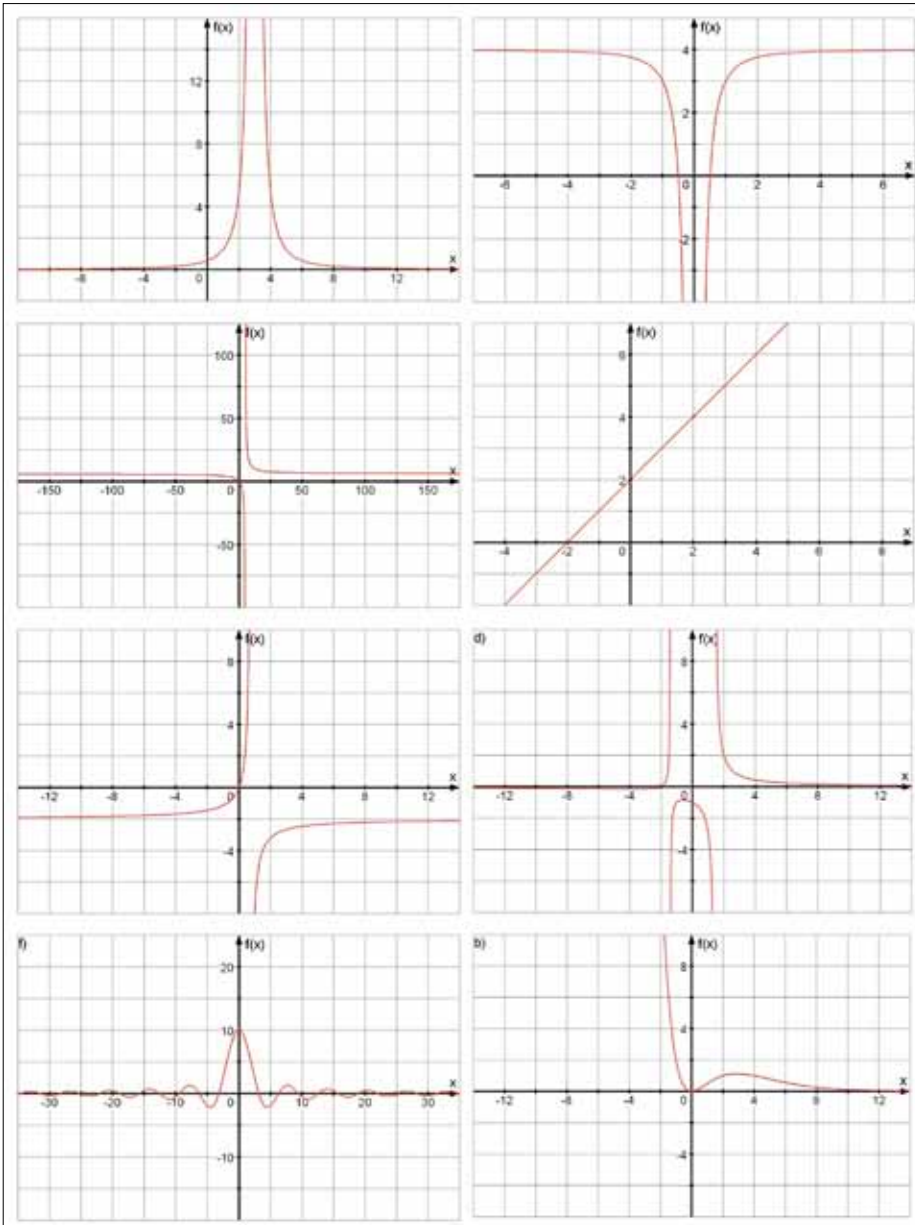


Abb. 1: Beispiele zum Spiel „Funktionen diktieren“

zularbeit – über die benutzen Vokabeln und Eigenschaften Gedanken macht und ihren Nutzen bewertet. Die Fragen 3 und 4, in denen nach Eigenschaften gefragt wird, die am besten bzw. am wenigsten gefallen, sind bewusst offen gehalten, um eine individuelle Stellungnahme anzuregen. Hier können beispielsweise Ästhetik oder Klarheit, aber auch humorvolle Bezeichnungen oder kreative Begriffe ein Kriterium sein. Wichtig ist nur, dass sich die Lernenden intensiv und kreativ mit den Begriffen auseinandersetzen. Die ersten vier Fragen sind so formuliert, dass jede und jeder – unabhängig vom mathematischen Können und Vorwissen – eine eigene Antwort formulieren kann.

Abb. 2 und Abb. 3 zeigen Ausschnitte aus den Antworten von Lisa und Paul (Namen geändert). In beiden Antworten auf Frage 1 wird deutlich, dass geläufige Bezeichnungen, die der Klassifikation bestimmter Funktionstypen dienen, eine große

#### Arbeitsauftrag: „Funktionen charakterisieren“

Während des Spiels „Funktionen diktieren“ haben Sie Begriffe benutzt, manche sogar neu erfunden und viel über Funktionsgraphen gesprochen. Bestimmt haben Sie Vokabeln und Eigenschaften gefunden/erfunden, die für andere Personen in der Klasse hilfreich sind.

Teilen Sie daher Ihre Erfindungen den anderen mit – und zwar am besten schriftlich.

*Zentrale Frage: Es gibt viele Funktionen – wie kann man sie unterscheiden bzw. charakterisieren?*

1. Welche Funktionen waren leicht zu beschreiben – und warum?
2. Welche Funktionen waren schwierig zu beschreiben – und warum?
3. Welches war die Vokabel bzw. die Eigenschaft, die Ihnen am besten gefallen hat?
4. Welches war die Vokabel bzw. die Eigenschaft, die Ihnen am wenigsten gefallen hat?
5. Versuchen Sie, die Vokabeln bzw. Eigenschaften, die Ihnen am nützlichsten erscheinen, möglichst übersichtlich darzustellen.
6. Wie würden Sie die folgende Frage beantworten: „Wie viele Funktionen gibt es?“

**Kasten 4:** Zweiter Arbeitsauftrag „Funktionen charakterisieren“

#### Arbeitsauftrag: „Funktionen diktieren – Ein Spiel“

- Bilden Sie Dreier-Teams. Ein Team besteht aus
  - Beschreiber,
  - Nachzeichner und
  - Beobachter.
- Beschreiber
  - wählt aus den Beispielen einen Funktionsgraphen aus,
  - beschreibt das Schaubild mit Worten so genau wie möglich.
- Nachzeichner
  - kann das Original nicht sehen,
  - darf nicht nachfragen,
  - zeichnet den Graphen anhand der Beschreibung so exakt wie möglich.
- Beobachter
  - sieht das Original und die Kopie,
  - achtet auf Missverständnisse und auf Benutzung der Fachsprache,
  - bespricht dies am Ende einer Runde mit den beiden anderen.

**Kasten 3:** Erster Arbeitsauftrag „Funktionen diktieren – Ein Spiel“

Zentrale Frage: Es gibt viele Funktionen  
- wie kann man sie unterscheiden bzw. charakterisieren?

1. Welche Funktionen waren leicht zu beschreiben - und warum?

Aus leichtesten waren die Schaubilder, die Strecken oder einfache Parabeln zeigte, diese konnte man einfachsten mit dem Begriff „Parabel“ oder durch die Zahlenwerte angeben.

4. Welches war die „Vokabel“ bzw. die Eigenschaft, die wir am gefallen hat?

Das „parabelförmige“ war nicht immer am besten umzusetzen, da nicht immer gesagt worden ist, in welche Richtung sie offen ist, wie steil sie ist, usw...

Abb. 2: Ausschnitt aus Lisas Antwort

Hilfe darstellen, „da sie schon bekannt waren und man sie beim Namen nennen konnte“, vgl. Abb. 3. Diese Klassifikation ist ja auch ein wesentliches Ziel der gesamten Unterrichtseinheit.

Es ist schön zu sehen, dass auch die Schülerinnen und Schüler selbst dieses Ziel erkennen. In Pauls Antwort auf Frage 5 sind bereits sehr viele Begriffe enthalten, die fast schon die gesamte Kurvendiskussion umfassen: „Gerade, Parabel, Hyperbel“ (also Funktionstypen); „steil, flach“ (also Steigung bzw. Ableitung); „parallel“ (also Asymptoten); „Hügel, Tal, Schlucht, Berg“ (also Extrempunkte und Krümmungsverhalten). Gerade die letztgenannten Begriffe machen deutlich, wie hilfreich Lernenden gerade fachfremde Begriffe sein können. Der „Berg“ ist natürlich höher als der „Hügel“, und in der „Schlucht“ fällt die Kurve steiler ab als im „Tal“. Zudem äußert sich in dieser Wortwahl auch die Vorstellung, dass Funktionsgraphen gerne als Seitenansicht von Landschaften interpretiert werden.

Besonders interessant waren die Antworten auf die letzte Frage nach der Anzahl der Funktionen, die in Abb. 4 dargestellt werden. Insbesondere die letzte der drei Antworten beschreibt treffend die Klassifikation von Funktionen: Es gibt sehr viele verschiedene einzelne Funktionen – genauso wie es sehr viele verschiedene einzelne Tiere gibt; dennoch kann man sie nach gewissen übereinstimmenden Merkmalen zu Gruppen zusammenfassen und so den Überblick behalten. Solche „Perlen“

– also Formulierungen und Gedanken von Lernenden, die besonders zutreffen und mit denen man in der Klasse gut weiterarbeiten kann – finden sich in einem Mathematikunterricht, in dem schreibend nachgedacht wird, immer wieder. Wird dieselbe Frage im fragend-entwickelnden Unterricht gestellt, melden sich meist nur diejenigen zu Wort, die eine möglichst regelgerechte, mathematische Antwort geben können (die ersten beiden Antworten in Abb. 4 gehen in diese Richtung). Die Analogie zur Artenvielfalt hingegen würde im normalen Unterricht wohl kaum genannt werden, weil der Lehrer „das bestimmt nicht hören will“. Ganz anders in einem Unterricht, in dem die Lernenden die Texte nicht für die Lehrkraft, sondern für sich selbst schreiben.

Aus den von den Schülerinnen und Schülern gefundenen bzw. erfundenen Begriffen sollte die Klasse im nächsten Schritt diejenigen herausfiltern, die für alle hilf-

reich sind. Dabei legte sich die Klasse auf gemeinsame Vokabeln fest. Die Lehrkraft hatte nur die Aufgabe, den Prozess zu strukturieren und zu moderieren; sie gab nicht einfach vor, wie es „richtig“ ist. So schrieb sie aus den eingesammelten Antworten aller Lernenden diejenigen Begriffe heraus, die von ihnen als nützlich bezeichnet wurden, und formulierte daraus den dritten Arbeitsauftrag (vgl. Kasten 5). Er kann in Einzelarbeit oder als Hausaufgabe bearbeitet werden.

Im Plenum wurden die Antworten gesammelt. Auch diesen Prozess moderierte die Lehrkraft und erstellte zusammen mit der Klasse eine Tabelle mit Vokabeln und Skizzen. Die wesentlichen Klassifikationen dabei waren:

- Klassen von Funktionen: „Kurven, die man beim Namen nennen kann“
- Steigung: Wichtig ist die Unterscheidung von steil/flach (Betrag von  $m$ ) und

zu Frage 1:

- Geraden waren leicht zu beschreiben: → Anfangs- und Schlusspunkt verbinden!
- Normale Parabeln oder Schaubilder wie  $y = x^2$  oder  $y = -x^2$ , da sie schon bekannt waren und man sie beim Namen nennen konnte.

zu Frage 3: neue Vokabeln wurden verwendet: z.B. „Hügelartig“. Diese Beschreibung hat mir sehr geholfen.

zu Frage 5: - Gerade; Parabel; Hyperbel; steil; flach; berg; kies; hügel; tal; schlucht; berg; hängen; parallel; halbkreisförmig...

Abb. 3: Ausschnitt aus Pauls Antwort

Ich würde sagen es gibt ein paar „Hauptfunktionen“ (Parabeln, Geraden), die jedoch in Kombination von mehreren Faktoren ( $y$ -Abschnitt, Länge, Steigung usw.) veränderlich sind. Alles in allem gibt es aber bestimmte Grundformen.

Man kann sie durch ihre Form (parabelförmig, gerade, ...) und durch die Punkte durch die sie gehen unterscheiden. Außerdem sollte man den Maßstab und die Einheit betrachten.

Es ist wie mit der Artenvielfalt auf der Erde, d.h. man kann es nie genau sagen, wie viele es sind.

Abb. 4: Drei Schülerantworten auf die Frage „Wie viele Funktionen gibt es?“

### Arbeitsauftrag: „Vokabeln“

Während des Spiels „Funktionen diktieren“ haben Sie viele Vokabeln benutzt oder sogar erfunden, die Ihnen nützlich erschienen. In Ihren Aufzeichnungen habe ich folgende Vokabeln gefunden:

Strecke – Parabel – Zahlenwerte – „durch den Nullpunkt“ – Ursprungsgerade – Gerade – Kurve – gespiegelt – Steigung – „verläuft durch den Punkt (...!)“ – positive/negative Steigung – „an der  $y$ -Achse spiegeln“ – Schwingung – Hochpunkt/Tiefpunkt – Wendepunkt – „Funktionen, die sich selbst gespiegelt haben“ – Grenzkennzeichnung des Koordinatensystems – Linkskurve – „Kurven, die man beim Namen nennen kann“ – hügelartig – steil/flach – Berg/Tal – Hyperbel – auf die  $x$ -Achse treffen – die  $y$ -Achse schneiden – Parallele – Breite der Parabel – „Wendepunkte, bei denen die Kurve einfach die Richtung geändert hat“ – ansteigend/abfallend – „wie rum läuft eine Kurve“ – höchster Punkt – „parallel zu einer Achse“ – Höhepunkt/Tiefpunkt – „schneidet die  $x/y$ -Achse an“ – steigt/fällt bis – Kosinus/Sinus-Kurve – „die Funktion überquert die  $x$ - oder  $y$ -Achse“ – Funktion ist im negativen/positiven Bereich – hoch und runter

*Zentrale Frage: Mit welchen Vokabeln wollen wir in Zukunft gemeinsam weiterarbeiten?*

- Sortieren Sie die Vokabeln! Achten Sie darauf, mehrere Begriffe, die dasselbe meinen, auch in die gleiche Kategorie zu sortieren.
- Zeichnen Sie zu jeder Vokabelgruppe eine Skizze, in der die Eigenschaft sichtbar wird.
- Bei den Vokabeln, die es mehrfach gibt: Welche Version sollen wir in Zukunft verwenden, damit die mathematische Sprache möglichst eindeutig wird?
- Zum Weiterdenken: Wie könnte man die Vokabeln in Worten und/oder mathematischer Sprache definieren? (Ohne Zeichnung!)

### Kasten 5: Dritter Arbeitsauftrag „Vokabeln“

steigt/fällt (Vorzeichen von  $m$ ), die zuvor von den Schülerinnen und Schülern als Synonyme verwendet wurden. Auf solche Fehlvorstellungen wird man als Lehrkraft oft erst in einer Klassenarbeit aufmerksam. In diesem Unterrichtsgang war es jedoch möglich, schon vor der rechnerischen Kurvendiskussion auf diese mögliche Fehlerquelle hinzuweisen – mit dem Erfolg, dass dieser Fehler in der entsprechenden Klassenarbeit seltener als sonst aufgetreten ist.

- **Symmetrien:** Da der Unterricht bis hierhin ohne Formeln abgelaufen ist, war es auch nicht schwierig, hier zugleich Symmetrien zur  $y$ -Achse, zum Ursprung und zu einem beliebigen Punkt zu besprechen, vor allem weil alle drei Variationen von der Klasse selbst erkannt wurden.
- **Besondere Punkte:** Hierunter wurden zunächst Schnittpunkte mit den Achsen sowie „Berge und Täler“ verstanden. Auch hier waren die Schülervorstellungen eine Bereicherung des Unterrichts: Der Begriff „Hochpunkt“ wird von der Klasse als verwirrend eingestuft, da der Graph noch höhere Punkte aufweisen kann. Der mathematische Begriff „lokales Maximum“, den die Lehr-

kraft anbot, wurde als hilfreicher angesehen und sollte – auf expliziten Wunsch der Klasse – zukünftig verwendet werden.

- **Weitere besondere Punkte – Wendepunkte:** Auch bei diesem Thema legte der Einblick ins Denken der Lernenden ein Missverständnis offen, das im klassischen Unterricht weniger auffallen würde: Wendepunkte wurden als Punkte beschrieben, „bei denen die Kurve einfach die Richtung geändert hat“. Einige Lernende verstehen den Begriff also als Hoch- bzw. Tiefpunkt, da dort der Graph wie ein Auto wendet, und nicht als „Krümmungsrichtungswechsellpunkt“ wie mathematisch intendiert (Hahn/Prediger 2008). Wird dieses Missverständnis nicht aufgedeckt, kann es nicht verwundern, wenn Lernende später die falsche Rechnung bzw. Ableitung wählen.

Zum Schluss dieses Unterrichtsgangs wurde das Spiel „Funktionen diktieren“ in *Kasten 3* ein zweites Mal gespielt. Dabei stellten alle Beteiligten fest, dass das Diktieren nicht nur schneller, sondern auch mit größerer Sicherheit und weniger Missverständnissen ablief. Die Schülerinnen und

Schüler erlebten, dass sie nun über die entsprechenden Begriffe verfügen, einen Funktionsgraphen exakt in Worten zu beschreiben – und das ist ein zentraler Aspekt der Kurvendiskussion, der der algebraischen Charakterisierung und Analyse vorangehen muss.

### Weiterer Unterricht

Da zu diesem Zeitpunkt des Unterrichts die meisten zur Unterscheidung von Funktionen notwendigen Begriffe und Eigenschaften aufgebaut waren, ging es im weiteren Unterricht darum, die entsprechenden rechnerischen Techniken zu entwickeln und zu erlernen. Daher wurden nun einige Klassen von Funktionen systematisch untersucht. Die rechnerischen Erkenntnisse wurden dabei immer wieder mit der zuvor erarbeiteten bildlichen und sprachlichen Ebene abgeglichen. Natürlich war dies trotz der Vorarbeit noch ein langer, und für die Lernenden durchaus anspruchsvoller Weg, auf den hier nicht näher eingegangen werden soll. Auch in dieser Phase wurden die Schülervorstellungen so oft wie möglich in den Unterricht mit einbezogen, immer mit dem Ziel, Vorstellungen von Lernenden zu aktivieren, Fehlvorstellungen aufzudecken und Perlen zu finden.

### Rückblick

Inwiefern haben sich meine anfangs geschilderten Hoffnungen erfüllt? Wie weit wurden die Ziele erreicht?

- Im Vergleich zu anderen Unterrichtseinheiten haben die Lernenden in diesen Stunden viel mehr geredet, gezeichnet, geschrieben, argumentiert und begründet als sonst. Außerdem waren sie viel motivierter und engagierter als vergleichbare Klassen. Die Kurvendiskussion wurde so zu einem kreativen Prozess des Entdeckens und Erfindens.
- Die Übersetzung von Bildern in Sprache und zurück fiel diesen Lernenden viel leichter im Vergleich zu Schülergruppen, bei denen ich frontaler unterrichtet bzw. bei denen ich als Lehrkraft mehr vorgegeben hatte. Vor allem die eher schwachen Lernenden zeigten hierbei deutlich bessere Leistungen als sonst.
- Die Übersetzung von Bildern und Sprache in Formeln gelang vor allem den Schülerinnen und Schülern im Mittelfeld besser als in vergleichbaren Lerngruppen – in erster Linie, weil sie viel öfter anhand selbst angefertigter Skizzen argumentiert haben.
- Die Fachbegriffe und Eigenschaften der Funktionen sind diesen Lernenden viel

länger im Gedächtnis geblieben – vor allem die Begriffe, die sie selbst erfunden haben. Darüber hinaus konnten die Schülerinnen und Schüler besser argumentieren und Fragestellungen aus dem Alltag leichter in mathematische Fragen übersetzen.

- Für viele Lernende blieb die Kurvendiskussion noch einige Zeit lang ein Mittel zum „Sortieren“ von Funktionen. Es stand für sie also weiterhin der Aspekt der Klassifikation im Vordergrund.
- Für mich als Lehrer war es spannend und inspirierend, mich gemeinsam mit den Lernenden einem mathematischen Problem zu nähern und nach Lösungen zu suchen. Darüber hinaus wurde nicht nur die Klasse, sondern auch ich auf Ideen und Fehlerquellen aufmerksam, die im normalen Unterricht sicherlich übersehen worden wären.

Insofern hat sich die Orientierung an individuellen Vorstellungen für alle am Unterricht Beteiligten gelohnt.

#### Literatur

Duit, Reinders (1993): *Schülervorstellungen: von Lerndefiziten zu neuen Unterrichtsansätzen*. In: *Naturwissenschaft im Unterricht – Physik 4 (16)*, S. 4–10

Gallin, Peter (2008): *Den Unterricht dialogisch gestalten: neun Arbeitsweisen und einige Tipps*. In: *Ruf, Urs / Keller, Stefan / Winter, Felix (Hrsg.): Besser lernen im Dialog: Dialogisches Lernen in der Unterrichtspraxis*. Eberhard Friedrich Verlag, Seelze-Velber

Hahn, Steffen / Prediger, Susanne (2008): *Bestand und Änderung: Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis*. In: *Journal für Mathematikdidaktik*, 29, S. 163–198

Hußmann, Stephan (2001): *Konstruktivistisches Lernen an Intentionalen Problemen: Theoretische und empirische Studie zu den Auswirkungen konstruktivistischer, computerorientierter Lernarrangements im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II auf die Begriffsbildung und das Problemlöseverhalten*. Preprintreihe zur Didaktik der Mathematik, Nr. 1, Universität Essen

Müller, Rainer / Wodzinski, Rita / Hopf, Martin (2004) (Hrsg.): *Schülervorstellungen in der Physik*. Aulis Verlag Deubner, Köln

#### Verfasser

**StD Dipl.-Math. Florian Karsten**  
Immanuel-Kant-Gymnasium, Leinfelden-Echterdingen  
Staatliches Seminar für Didaktik und Lehrerbildung (Gymnasien), Stuttgart  
karsten@seminar-stuttgart.de



#### Klassenarbeiten Mathematik 8. Klasse **G8**

Auf G8 abgestimmte Klassenarbeiten zum eigenständigen Üben und Vorbereiten zu den zentralen Themen der 8. Klasse wie z. B. lineare Funktionen, lineare Gleichungssysteme, gebrochen-rationale Funktionen, Strahlensatz, Ähnlichkeit, Laplace-Wahrscheinlichkeiten.

140 Seiten, Format A5

■ Best.-Nr. 900321 € 8,95



#### Klassenarbeiten Mathematik 9. Klasse **G8**

Für G8 passende Klassenarbeiten mit schülergerechten Lösungen zu den zentralen Themen der 9. Klasse wie z. B. reelle Zahlen, Satzgruppe des Pythagoras, quadratische Funktionen und Gleichungen, Potenzen, Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck, mehrstufige Zufallsexperimente, Körper.

159 Seiten, Format A5

■ Best.-Nr. 900331 € 8,95



#### Klassenarbeiten Mathematik 10. Klasse **G8**

Vielseitige Klassenarbeiten zu den zentralen Themen der 10. Klasse (G8), u. a.: Kreismessung, Kugel, trigonometrische und Exponentialfunktionen, Logarithmen, bedingte Wahrscheinlichkeit, ganzrationale Funktionen, Eigenschaften von Funktionsgraphen. Mit Hinweisen und ausführlichen Lösungen.

139 Seiten, Format A5

■ Best.-Nr. 900341 € 8,95

**Bestellungen bitte direkt an:**

STARK Verlagsgesellschaft mbH & Co. KG  
Postfach 1852 · D-85318 Freising  
Telefon 0180 3 179000\* · Telefax 0180 3 179001\*  
www.stark-verlag.de · info@stark-verlag.de

\* 9 Cent pro Minute aus dem deutschen Festnetz; Mobilfunk bis 42 Cent pro Minute  
(aus dem Mobilfunknetz wählen Sie bitte die Festnetznummer 08167 9573-0)

Preise gültig bis 31.07.2012

Lernen · Wissen · Zukunft

**STARK**