

FLORIAN KARSTEN

—

Eine mathematische
Darstellung der Quasi-
Wahrscheinlichkeits-
verteilungen in der
Quantenmechanik

—

Diplomarbeit

—

PROF. DR. BURKHARD KÜMMERER

Mathematisches Institut A

Universität Stuttgart

Danke

*So eine Arbeit wird eigentlich nie fertig,
man muß sie für fertig erklären, wenn
man nach Zeit und Umständen das
möglichste getan hat.*

J. W. Goethe

Diese Diplomarbeit wurde in der Arbeitsgruppe Operatoralgebren und Quantenstochastik am Mathematischen Institut A der Universität Stuttgart unter der Leitung von PROF. DR. BURKHARD KÜMMERER angefertigt.

Für das interessante Thema und die hervorragende, persönliche Begleitung – hin und wieder bis spät in die Nacht – bedanke ich mich sehr herzlich bei Herrn Kümmerer.

Ein herzliches Dankeschön möchte ich aber auch der ganzen Arbeitsgruppe sagen, die mir mit Rat und Tat, mit Literaturtips und Kaffee zur Seite stand. Ohne Frau DR. RER. NAT. CLAUDIA HERTFELDER und Herrn DIPL. PHYS. CLAUS KÖSTLER hätte ich wohl nicht so gut verstanden, worum es bei dieser Diplomarbeit ging.

Die intensiven Diskussionen mit meinen „Leidensgenossen“ MICHAEL MAHLER und ALEXANDER RUEFF werde ich ebenso wie die lustige Stimmung stets in guter Erinnerung behalten.

Meiner Freundin danke ich für ihr Verständnis und für ihre Fragen, die mich immer wieder angeregt haben, mein Thema so gut zu verstehen, daß ich es auch Nicht-Fachleuten erklären kann.

Mein größter Dank gilt meinen Eltern, ohne deren Unterstützung mein Studium in dieser Form nicht möglich gewesen wäre.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|------------|
| Erklärung | iii |
| Danke | v |
| Inhaltsverzeichnis | vii |
| Abbildungsverzeichnis | ix |
| Einleitung | 1 |
| 1 Mathematische Grundlagen | 5 |
| 1.1 Notation | 5 |
| 1.2 Der symmetrische Fockraum | 6 |
| 1.3 Operatoren auf dem symmetrischen Fockraum | 8 |
| 1.4 Spurklasseoperatoren im Hilbertraum | 14 |
| 1.5 Klassische Zustände im symmetrischen Fockraum | 16 |
| 2 P-Darstellung | 21 |
| 2.1 Definition und Eigenschaften | 21 |
| 2.2 Beispiele | 26 |
| 2.3 Quantencharakteristische Funktion | 30 |
| 3 Wigner-Darstellung | 37 |
| 3.1 Definition und Eigenschaften | 38 |
| 3.2 Beispiele | 42 |
| 3.3 Wigners ursprüngliche Formulierung | 46 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4 | Q-Darstellung | 49 |
| 4.1 | Definition und Eigenschaften | 49 |
| 4.2 | Beispiele | 50 |
| 4.3 | Quantencharakteristische Funktion | 51 |
| 4.4 | Beispiele | 58 |
| 5 | Verallgemeinerte Darstellung | 63 |
| 5.1 | Definition und Eigenschaften | 63 |
| 5.2 | Verallgemeinerte Darstellung in der α -Ebene | 65 |
| 5.3 | Noch allgemeiner (Husimi-Darstellung) | 66 |
| | Literaturverzeichnis | 69 |

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Die Geometrie der Zustände auf dem symmetrischen Fockraum | 19 |
| 2.1 | P-Funktion des Gibbs-Zustandes | 29 |
| 2.2 | α -Ebene und Phasenraum – Eine optische Hilfestellung | 33 |
| 2.3 | Vergleich der α -Ebene mit dem Ort-Impuls-Phasenraum | 35 |
| 3.1 | Wigner-Funktion des Gibbs-Zustandes | 44 |
| 3.2 | Wigner-Funktion des Teilchenzahl-Zustandes $ 4\rangle \langle 4 $ | 45 |
| 3.3 | Wigner-Funktion eines gequetschten Zustandes ($\kappa = 1$) | 46 |
| 4.1 | Zusammenhang von P-, Wigner- und Q-Funktion mittels Faltung | 58 |
| 4.2 | Q-Funktion des Gibbs-Zustandes | 60 |
| 4.3 | Q-Funktion eines gequetschten Zustandes ($\kappa = 1$) | 60 |
| 4.4 | Q-Funktion des Teilchenzahl-Zustandes $ 4\rangle \langle 4 $ von oben und von unten betrachtet | 61 |
| 5.1 | Zusammenhang zwischen den verallgemeinerten Funktionen | 64 |

Einleitung

All of our ideas in physics require a certain amount of intelligence; they are not purely mathematical ideas.

R. P. Feynman

Hinter dem Namen *Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilungen* steckt die physikalische Methode, das Konzept der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf dem Phasenraum aus der klassischen Physik in die Quantenphysik zu übertragen. Diese Methode wird in der vorliegenden Arbeit in die Sprache der Mathematik übersetzt.

In der klassischen Optik kann man den Zustand eines elektromagnetischen Oszillators vollständig durch die Statistik der klassischen, komplexen Amplitude α beschreiben. Ist die Amplitude fest, so ist das Feld kohärent. Verändert sich α , so ist das Feld nur teilweise kohärent oder ganz inkohärent. Man kann sich den Realteil bzw. den Imaginärteil von α als Ort bzw. Impuls des elektromagnetischen Oszillators vorstellen. Daher kann man in der klassischen Optik ebenso wie in der klassischen Mechanik die Statistik der komplexen Amplitude α bzw. die Statistik von Ort q und Impuls p durch eine Phasenraum-Verteilungsfunktion (Phasenraum-Dichte) beschreiben. Die Verteilungsfunktion $f(q, p)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, daß der Oszillator sich bei gleichzeitiger Messung gerade am Ort q mit dem Impuls p befindet. Kennt man $f(q, p)$, so kann man alle statistischen Größen des elektromagnetischen Oszillators berechnen. In diesem Sinne beschreibt die Phasenraum-Verteilungsfunktion den Zustand des Oszillators.

In der Quantenoptik bzw. Quantenmechanik muß das Konzept von Phasenraum-Verteilungsfunktionen im allgemeinen jedoch versagen. Zuerst verhindert nämlich die Heisenberg'sche Unschärferelation, daß man Ort und Impuls gleichzeitig und exakt messen kann. Aber man kann versuchen, in bestimmten Situationen eine Quanten-Phasenraum-Verteilungsfunktion $f(q, p)$ zu entwickeln, um damit beobachtbare Größen auf eine klassische Art und Weise zu berechnen.

Das Konzept eines Quanten-Phasenraumes muß natürlich Mängel aufweisen: Die Verteilungsfunktion $f(q, p)$ kann z. B. negativ werden, sie kann sich nicht gemäßig, d. h.

unstetig, Verhalten oder in manchen Fällen erst gar nicht existieren. Mit Hilfe solcher Verteilungsfunktionen kann man also nur bedingt statistische Aussagen machen, und man nennt sie daher *Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilungen*. Man kann mit ihrer Hilfe Quanteneffekte mit soviel klassischer Sprache wie möglich beschreiben, und man erhält durch sie Einblicke in die Quantentheorie, die so durch kaum ein anderes Verfahren möglich sind. Ein Beispiel hierfür ist die Korrespondenz zwischen klassischer Theorie und Quantentheorie. Ein weiterer Vorteil der Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist, daß die abstrakten Gleichungen, die Quantensysteme beschreiben, in Gleichungen umgeformt werden können, die u. a. von Computern leicht berechnet werden können. Dies alles erklärt die häufige Verwendung dieser Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilungen in vielen Bereichen der Physik, wie z. B. der Statistischen Physik, der Quantenoptik, der Streutheorie und der Chaostheorie.

Die erste Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilung wurde 1932 von E. WIGNER [83] eingeführt, auf der Suche nach Quanten-Korrekturen für die Boltzmann-Formel. Nach dieser, heute als *Wigner-Funktion* bezeichneten, Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilung entstanden noch viele weitere mit unterschiedlichen Eigenschaften. Die bekanntesten darunter sind die *P-Darstellung*, die *Q-Darstellung* und die *Husimi-Darstellung*. Mit diesen vier Darstellungen und einer verallgemeinerten Darstellung beschäftigt sich dieser Text.

Da es keinen einheitlichen Weg gibt, die Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu definieren, gibt es auch noch viele andere Darstellungen mit unterschiedlichen Eigenschaften und Anwendungen. Will man entscheiden, welche Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilung man wählen soll, so ist dies keine Frage des Geschmacks. Je nachdem, welches physikalische System man beschreiben oder welches Problem man lösen möchte, fällt die Wahl auf eine andere Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die folgenden Beispiele sollen dies verdeutlichen.

In der Quantenoptik – insbesondere bei der Beschreibung von Kohärenz – berechnet man häufig Erwartungswerte normalgeordneter Operatoren. Da man mit der von R. GLAUBER und E. SUDARSHAN entwickelten P-Darstellung gerade solche normalgeordneten Produkte von Operatoren sehr einfach berechnen kann, wird diese Darstellung überwiegend in der Quantenoptik verwendet.

In der Theorie der Streuprozesse bedient man sich in der Regel der Wigner-Darstellung. Die auftretenden Gleichungen für die Zeitentwicklung eines solchen Prozesses nehmen nämlich die einfachste Form an, wenn man sie mit Hilfe der Wigner-Darstellung berechnet.

Ein weiteres Beispiel sind chaotische Systeme. Die Quanten-Zeitentwicklung eines solchen Systems kann man durch eine Abfolge graphischer Darstellungen von Verteilungsfunktionen im Phasenraum untersuchen. Die Schwierigkeit hierbei ist, daß die entstehenden Zeichnungen sehr komplex sind. Man kann die relevanten Informationen daher nur sehr mühsam herauslesen. Von den bisher entwickelten Darstellungen eignet sich die Husimi-Darstellung für dieses Problem am besten, da sie eine glatte Struktur zeigt und

sich gemäßigt verhält.

Versucht man, die physikalischen Texte über Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilungen durch eine mathematische Brille zu lesen, so stößt man auf mehrere Probleme: Erstens fehlt in der Regel ein mathematischer Rahmen, also z. B. die Angabe der Räume, in denen gearbeitet wird. Ebenso fehlt zweitens eine exakte Definition der Elemente dieser Räume und der auf ihnen wirkenden Operatoren. Drittens sind die auftretenden Gleichungen und Herleitungen oft nur formale, wenig mathematische Rechnungen. Und viertens erschwert die unterschiedliche Darstellung des Themas in den verschiedenen Texten das Verständnis zusätzlich. In dieser Arbeit werden einige dieser Probleme gelöst.

In Kapitel 1 wird der mathematische Rahmen für das Thema erarbeitet. Mit dem *symmetrischen Fockraum*, den *Glaubervektoren*, den *Erzeugern* und *Vernichtern*, den *Feld-*, *Weyl-* und *Dichteoperatoren* und den *klassischen Zuständen* werden die zentralen Begriffe eingeführt.

Die erste Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilung, die *P-Darstellung*, mit der wir uns in Kapitel 2 beschäftigen, entsteht durch den Versuch, Dichteoperatoren als kontinuierliche Konvexkombination von reinen Zuständen zu schreiben. Neben Eigenschaften und wichtigen Beispielen behandeln wir auch einen alternativen Zugang zur P-Darstellung über die sogenannte *quantencharakteristische Funktion*. Sie ist eine Quanten-Version der aus der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie bekannten *charakteristischen Funktion*.

Die älteste Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilung, die *Wigner-Funktion* ist das Thema von Kapitel 3. Hier ist u. a. von Interesse, wie die Wigner-Funktion aus der P-Funktion durch Faltung mit einer zweidimensionalen Gauß-Glocke entsteht.

Der Versuch, eine Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilung zu entwickeln, indem man die Diagonalelemente des Dichteoperators verwendet, führt uns in Kapitel 4 zur Q-Darstellung. Auch hier ist der Zusammenhang mit den anderen Darstellungen durch Faltung mit Gauß-Glocken unterschiedlicher Breite von Interesse.

Der einheitliche Zugang zu den drei Darstellungen mit Hilfe der quantencharakteristischen Funktion liefert in Kapitel 5 eine verallgemeinerte Darstellung, die die P-, Wigner- und Q-Darstellungen als Spezialfälle enthält. Auch der Zusammenhang zwischen den einzelnen Darstellungen wird auf eine einheitliche Form gebracht, die eine Analogie zur Wärmeleitungsgleichung zeigt. Die verallgemeinerte Darstellung wird noch einmal erweitert, um auch die *Husimi-Darstellung* noch beschreiben zu können.

Kapitel 1

Mathematische Grundlagen

The beginner should not be discouraged if he finds that he does not have the prerequisites for reading the prerequisites.

P. Halmos

Wir werden im folgenden den für diese Arbeit benötigten mathematischen Rahmen erarbeiten.

1.1 Notation

Um die Gleichungen übersichtlich zu halten, werden die physikalischen Größen Masse und Frequenz sowie die Planck'sche Konstante \hbar zu 1 normiert. In der folgenden Tabelle werden die in diesem Text verwendeten Symbole, die später nicht detailliert definiert werden, aufgeführt:

| | |
|--------------------------------|--|
| $\mathbb{1}$ | Der Einsoperator, die identische Abbildung; |
| \mathbb{C} | Der Körper der komplexen Zahlen; |
| e | Die Euler'sche Zahl; |
| \mathcal{H} | Ein separabler Hilbertraum; |
| h_n | Die Hermitefunktionen; |
| i | Die imaginäre Einheit; |
| $\ell^2(\mathbb{N})$ | Der Raum der quadratsummierbaren, komplexen Folgen; |
| $L^2(\mathbb{R})$ | Der Raum der quadratintegribaren, komplexen Funktionen; |
| \mathbb{N} | Der Körper der natürlichen Zahlen; |
| \mathbb{R} | Der Körper der reellen Zahlen; |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$ | Ein komplexes Skalarprodukt (in der ersten Komponente linear). |

1.2 Der symmetrische Fockraum

Der symmetrische Fockraum und die Operatoren auf ihm werden in den folgenden beiden Abschnitten nur stichwortartig dargestellt. Eine ausführliche Darstellung, die auch viele Beweise umfaßt, findet sich in RUEFF [29].

Zu einem gegebenen Hilbertraum \mathcal{H} ist das n -fache (Hilbertraum-)Tensorprodukt

$$\mathcal{H}^{\otimes n} := \underbrace{\mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}}_{n \text{ mal}} \quad (1.1)$$

die Vervollständigung des n -fachen algebraischen Tensorproduktes bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n, \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n \rangle := \langle \varphi_1, \psi_1 \rangle \cdots \langle \varphi_n, \psi_n \rangle. \quad (1.2)$$

Wir suchen nun Vektoren $\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n$ in $\mathcal{H}^{\otimes n}$, die sich unter Permutation nicht ändern. Dazu verwendet man die unitäre Darstellung $\sigma \rightarrow U_\sigma$ der Gruppe \mathcal{S}_n , d. h. der Permutationsgruppe auf n Elementen, auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}^{\otimes n}$. Dabei ist U_σ für ein $\sigma \in \mathcal{S}_n$ die Fortsetzung des Operators

$$U_\sigma : \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n \mapsto \psi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\sigma(n)} \quad (1.3)$$

zu einem unitären Operator auf $\mathcal{H}^{\otimes n}$. Die orthogonale Projektion

$$P_+^n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} U_\sigma \quad (1.4)$$

auf $\mathcal{H}^{\otimes n}$ heißt *Symmetrisierungoperator*. Mit ihrer Hilfe definiert

$$\mathcal{H}_+^{\otimes n} := P_+^n(\mathcal{H}^{\otimes n}) \quad (1.5)$$

den *Bosonen-Unterraum* von $\mathcal{H}^{\otimes n}$ als den Teilraum der Elemente, die sich unter Permutation nicht verändern. Der *symmetrische Fockraum* $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ über \mathcal{H} wird definiert durch

$$\mathcal{F}_+(\mathcal{H}) := \mathbb{C} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_+^{\otimes 2} \oplus \mathcal{H}_+^{\otimes 3} \oplus \cdots. \quad (1.6)$$

Der Vektor $\Omega := (1, 0, 0, \dots) \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ heißt *Vakuumvektor*.

Wir werden im Folgenden zwei Spezialfälle des symmetrischen Fockraums benötigen, den symmetrischen Fockraum über \mathbb{C}^n und über \mathbb{C} . Der *symmetrische Fockraum* $\mathcal{F}_+(\mathbb{C}^n)$ über \mathbb{C}^n hat nach Gleichung (1.6) die Form

$$\mathcal{F}_+(\mathbb{C}^n) := \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n)_+^{\otimes 2} \oplus (\mathbb{C}^n)_+^{\otimes 3} \oplus \cdots. \quad (1.7)$$

Für den *symmetrischen Fockraum* $\mathcal{F}_+(\mathbb{C})$ über \mathbb{C} ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_+(\mathbb{C}) &:= \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}_+^{\otimes 2} \oplus \mathbb{C}_+^{\otimes 3} \oplus \dots \\ &\simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \dots \\ &\simeq \ell^2(\mathbb{N}).\end{aligned}\tag{1.8}$$

Die Abbildung $\ell^2(\mathbb{N}) \ni (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_n f_n h_n \in L^2(\mathbb{R})$ mit den Hermitefunktionen h_n liefert eine weitere, für die Physik wichtige, Isomorphie:

$$\mathcal{F}_+(\mathbb{C}) \simeq L^2(\mathbb{R}).\tag{1.9}$$

1.2.1 Physikalische Interpretation: Wenn \mathcal{H} der Systemhilbertraum des quantenmechanischen Systems „Teilchen einer Sorte“ ist, so beschreibt $\mathcal{H}^{\otimes n}$ das System „ n solche Teilchen“. Sind diese Teilchen ununterscheidbar, d. h., der Zustand des Systems ändert sich durch Permutation nicht, so wird dieses Bosonen-System durch $\mathcal{H}_+^{\otimes n}$ beschrieben. Der symmetrische Fockraum $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ ist der Hilbertraum des Systems „beliebig viele (nicht unendlich viele) Bosonen in beliebig vielen Zuständen“. Der symmetrische Fockraum über \mathbb{C}^n ist die mathematische Beschreibung des harmonischen Oszillators mit n Freiheitsgraden bzw. des elektromagnetischen Feldes in n Moden.

1.2.2 Glaubervektoren: Zu jedem $\psi \in \mathcal{H}$ wird durch

$$e(\psi) := e^{-\frac{1}{2}\|\psi\|^2} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \frac{\psi^{\otimes n}}{\sqrt{n!}}\tag{1.10}$$

ein Vektor in $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ definiert. Diese Vektoren heißen *Glaubervektoren*. In physikalischen Texten findet man sie auch als *kohärente Zustände*.

1.2.3 Proposition: Es seien $e(\psi)$ und $e(\varphi)$ zwei Glaubervektoren aus $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$. Dann gilt:

- (i) $\langle e(\psi), e(\varphi) \rangle = \exp \left\{ \langle \psi, \varphi \rangle - \frac{1}{2}\|\psi\|^2 - \frac{1}{2}\|\varphi\|^2 \right\} \neq 0$;
- (ii) Glaubervektoren sind Einheitsvektoren, d. h., $\|e(\psi)\| = 1$;
- (iii) $\{e(\psi) : \psi \in \mathcal{H}\}$ ist total in $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$.

Beweis:

- (i) Für das Skalarprodukt ergibt sich

$$\langle e(\psi), e(\varphi) \rangle = \left\langle e^{-\frac{1}{2}\|\psi\|^2} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \frac{\psi^{\otimes n}}{\sqrt{n!}}, e^{-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varphi^{\otimes n}}{\sqrt{n!}} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\frac{1}{2}\|\psi\|^2} e^{-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2} \left\langle \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \frac{\psi^{\otimes n}}{\sqrt{n!}}, \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varphi^{\otimes n}}{\sqrt{n!}} \right\rangle \\
&= e^{-\frac{1}{2}\|\psi\|^2} e^{-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} \langle \psi^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \rangle \\
&= e^{-\frac{1}{2}\|\psi\|^2} e^{-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2} e^{\langle \psi, \varphi \rangle} \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

Glaubervektoren stehen also nie orthogonal zueinander.

$$(ii) \quad \|e(\psi)\|^2 = \langle e(\psi), e(\psi) \rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\psi\|^2} e^{-\frac{1}{2}\|\psi\|^2} e^{\langle \psi, \psi \rangle} = e^{-\frac{1}{2}\|\psi\|^2} e^{-\frac{1}{2}\|\psi\|^2} e^{\|\psi\|^2} = 1.$$

(iii) Siehe RUEFF [29] bzw. MAHLER in [14].

■

Die Glaubervektoren in $\mathcal{F}_+(\mathbb{C})$ haben für ein $\alpha \in \mathbb{C}$ die Form

$$e(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \cdot \left(1, \alpha, \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}}, \frac{\alpha^3}{\sqrt{3!}}, \dots \right), \quad (1.11)$$

und für das Skalarprodukt ergibt sich mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\langle e(\alpha), e(\beta) \rangle = \exp \left\{ \alpha \bar{\beta} - \frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 \right\}. \quad (1.12)$$

1.3 Operatoren auf dem symmetrischen Fockraum

1.3.1 Erzeuger und Vernichter auf $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$: Für $\varphi \in \mathcal{H}$ definieren wir

$$A^n(\varphi) : \mathcal{H}^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{H}^{\otimes n-1}, \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n \mapsto \sqrt{n} \langle \psi_1, \varphi \rangle \psi_2 \otimes \dots \otimes \psi_n \quad (1.13)$$

und

$$A_+^n(\varphi) : \mathcal{H}_+^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{H}_+^{\otimes n-1}, \psi \mapsto P_+^{n-1} A^n(\varphi) \psi. \quad (1.14)$$

Es sei $\mathcal{D} := \{(\psi_0, \psi_1, \dots) \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H}) : \sum_n n \|\psi_n\|^2 < \infty\}$. Für $(\psi_0, \psi_1, \dots) \in \mathcal{D}$ sind dann

$$\tilde{A}(\varphi)(\psi_0, \psi_1, \dots) := (A_+^1(\varphi)\psi_1, A_+^2(\varphi)\psi_2, \dots); \quad (1.15)$$

$$\tilde{A}^*(\varphi)(\psi_0, \psi_1, \dots) := (0, A_+^1(\varphi)^*\psi_0, A_+^2(\varphi)^*\psi_1, \dots) \quad (1.16)$$

abschließbare Operatoren mit Abschlüssen $A(\varphi)$ und $A^*(\varphi)$. Es ist $A(\varphi)^* = A^*(\varphi)$ und es gelten die *kanonischen Vertauschungsrelationen (canonical commutation relations, CCR)*

$$[A(\varphi), A(\psi)] = [A^*(\varphi), A^*(\psi)] = 0; \quad (1.17)$$

$$[A(\varphi), A^*(\psi)] = \langle \psi, \varphi \rangle \mathbb{1}. \quad (1.18)$$

Die Operatoren $A(\varphi)$ und $A^*(\varphi)$ heißen (*Bosonen-*)*Vernichter* und (*Bosonen-*)*Erzeuger* für den Zustand φ .

Die Abbildung $\varphi \mapsto A^*(\varphi)$ ist linear; die Abbildung $\varphi \mapsto A(\varphi)$ ist antilinear, d. h., für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

$$A^*(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha A^*(\varphi) + \beta A^*(\psi); \quad (1.19)$$

$$A(\alpha\varphi + \beta\psi) = \bar{\alpha} A(\varphi) + \bar{\beta} A(\psi). \quad (1.20)$$

1.3.2 Teilchenzahloperator auf $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$: Der Operator

$$N(\varphi) := A^*(\varphi)A(\varphi) \quad (1.21)$$

mit Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(N) := \left\{ (\psi_0, \psi_1, \dots) \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H}) : \sum_n n^2 \|\psi_n\|^2 < \infty \right\} \quad (1.22)$$

heißt *Teilchenzahloperator* und mißt die Anzahl der Teilchen im Zustand φ .

1.3.3 Orts- und Impulsoperator auf $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$: Die Operatoren

$$Q(\varphi) := \frac{1}{\sqrt{2}}(A(\varphi) + A^*(\varphi)); \quad P(\varphi) := \frac{1}{i\sqrt{2}}(A(\varphi) - A^*(\varphi)) \quad (1.23)$$

mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(Q) = \mathcal{D}(P) := \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(A^*) \supseteq \mathcal{D}$ heißen *Ortsoperator* und *Impulsoperator* für den Zustand φ . Für sie gilt die Vertauschungsrelation

$$[Q(\varphi), P(\psi)] = \operatorname{Re}(\langle \psi, \varphi \rangle) i\mathbb{1}. \quad (1.24)$$

1.3.4 Feldoperatoren auf $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$: Für jedes $\varphi \in \mathcal{H}$ definiert

$$\Phi(\varphi) := \frac{1}{\sqrt{2}}(A(\varphi) + A^*(\varphi)) \quad (1.25)$$

einen Operator auf $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$, den sogenannten *Feldoperator* mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(\Phi) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(A^*) \supseteq \mathcal{D}$. Er ist wesentlich selbstadjungiert, und sein Abschluß wird ebenfalls mit $\Phi(\varphi)$ bezeichnet.

Die Abbildung $\varphi \mapsto \Phi(\varphi)$ ist über \mathbb{R} linear, d. h.,

$$\Phi(s\varphi + t\psi) = s\Phi(\varphi) + t\Phi(\psi) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}. \quad (1.26)$$

Für die Feldoperatoren gilt die Vertauschungsrelation

$$[\Phi(\varphi), \Phi(\psi)] = \operatorname{Im}(\langle \varphi, \psi \rangle) i\mathbb{1}. \quad (1.27)$$

Mit Hilfe von Feldoperatoren kann man Erzeuger, Vernichter, Orts- und Impulsoperator einheitlich darstellen:

$$Q(\varphi) = \Phi(\varphi); \quad P(\varphi) = \Phi(i\varphi); \quad (1.28)$$

$$A(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi(\varphi) + i\Phi(i\varphi)); \quad A^*(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi(\varphi) - i\Phi(i\varphi)). \quad (1.29)$$

1.3.5 Weyloperatoren auf $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$: Die Operatoren $Q(\varphi)$ und $P(\varphi)$ erzeugen für alle $s, t \in \mathbb{R}$ durch

$$U_s(\varphi) := e^{isP(\varphi)}; \quad (1.30)$$

$$V_t(\varphi) := e^{itQ(\varphi)} \quad (1.31)$$

unitäre, stark-stetige (d. h. in der starken Operatortopologie stetige) Einparametergruppen auf $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$. Für diese gelten die sogenannten *Weylrelationen*

$$U_s(\varphi)V_t(\varphi) = e^{ist} V_t(\varphi)U_s(\varphi). \quad (1.32)$$

Diese Relationen kann man auch noch allgemeiner behandeln: Für jedes $\varphi \in \mathcal{H}$ definiert man einen unitären *Weyloperator* $W(\varphi)$ durch

$$W(\varphi) := e^{i\Phi(\varphi)}. \quad (1.33)$$

Wiederum wird für $t \in \mathbb{R}$ durch

$$W_t(\varphi) := e^{i\Phi(t\varphi)} = e^{it\Phi(\varphi)} \quad (1.34)$$

eine unitäre, stark-stetige Einparametergruppe definiert, die ebenfalls die Weylrelationen erfüllt:

$$W_s(\varphi)W_t(\varphi) = e^{ist} W_t(\varphi)W_s(\varphi). \quad (1.35)$$

Schreibt man diese Relationen mit Weyloperatoren, so gilt

$$W(\varphi)W(\psi) = e^{i\frac{1}{2}\text{Im}(\langle\varphi,\psi\rangle)} W(\varphi + \psi); \quad (1.36)$$

$$W(\varphi)W(\psi) = e^{i\text{Im}(\langle\varphi,\psi\rangle)} W(\psi)W(\varphi). \quad (1.37)$$

Ein Weyloperator $W(\varphi)$ wirkt auf einen Glaubervektor $e(\psi)$ durch

$$W(\varphi)e(\psi) = e^{i\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Re}(\langle\psi,\varphi\rangle)} e\left(\psi + i\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\right). \quad (1.38)$$

Auf den Vakuumvektor $\Omega \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ wirkt der Weyloperator $W(\varphi)$ durch

$$W(\varphi)\Omega = e\left(i\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\right), \quad (1.39)$$

und es gilt

$$\langle W(\varphi) \Omega, \Omega \rangle = e^{-\|\varphi\|^2/4}. \quad (1.40)$$

Umgekehrt lässt sich jeder Glaubervektor berechnen, indem man den entsprechenden Weyloperator auf den Vakuumvektor anwendet:

$$e(\psi) = W(-i\sqrt{2}\psi) \Omega. \quad (1.41)$$

1.3.6 Die Operatoren in $\mathcal{F}_+(\mathbb{C})$: Wir werden im folgenden die oben eingeführten Operatoren vor allem im Spezialfall $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ benötigen.

Die Erzeuger und Vernichter in $\mathcal{F}_+(\mathbb{C}) \simeq \ell^2(\mathbb{N})$ werden mit

$$A^* := A^*(1); \quad A := A(1) \quad (1.42)$$

bezeichnet und haben folgende Form:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & \sqrt{2} & 0 & & \\ & & \sqrt{3} & 0 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \sqrt{2} & & \\ & & 0 & \sqrt{3} & \\ & & & 0 & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

Ein Vektor, der den n -Teilchenraum beschreibt, ist ein komplexes Vielfaches des Vektors

$$x_n = (\underbrace{0}_{0\text{-te Stelle}}, \dots, 0, \underbrace{1}_{n\text{-te Stelle}}, 0, \dots)^T. \quad (1.44)$$

Erzeuger und Vernichter wirken auf x_n folgendermaßen:

$$\begin{aligned} A^*(x_n) &= \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & \sqrt{2} & 0 & & \\ & & \sqrt{3} & 0 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{n} \\ \vdots \end{pmatrix} = \sqrt{n} x_{n+1}; \\ A(x_n) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \sqrt{2} & & \\ & & 0 & \sqrt{3} & \\ & & & 0 & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sqrt{n-1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \sqrt{n-1} x_{n-1}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Der Teilchenzahloperator $N := N(1)$ in $\mathcal{F}_+(\mathbb{C})$ ergibt sich damit zu

$$N = A^*A = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

und wirkt auf x_n wie folgt:

$$N(x_n) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (n-1) \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = (n-1)x_n. \quad (1.47)$$

Im symmetrischen Fockraum $\mathcal{F}_+(\mathbb{C})$ sind A^* und A also die aus der Physik bekannten Erzeuger und Vernichter und es gilt:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(A + A^*); \quad P = \frac{1}{i\sqrt{2}}(A - A^*); \quad (1.48)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP); \quad A^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP). \quad (1.49)$$

Die Vertauschungsrelationen lauten hier also

$$[Q, P] = i\mathbb{1}; \quad (1.50)$$

$$[A, A^*] = \mathbb{1}. \quad (1.51)$$

Die Operatoren Q und P haben in $\mathcal{F}_+(\mathbb{C}) \simeq \ell^2(\mathbb{N})$ die Gestalt

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & & \\ & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \\ & & \sqrt{3} & 0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}; \quad (1.52)$$

$$P = \frac{1}{i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & & \\ & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \\ & & -\sqrt{3} & 0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (1.53)$$

1.3.7 Die Wirkung von Erzeugern und Vernichtern auf Glaubervektoren: Der Vernichter A wirkt auf einen Glaubervektor $e(\alpha) \in \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{F}_+(\mathbb{C})$ folgendermaßen:

$$A e(\alpha) = \alpha e(\alpha). \quad (1.54)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} A e(\alpha) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \sqrt{2} & & \\ & & 0 & \sqrt{3} & \\ & & & 0 & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \cdot e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \cdot \left(1, \alpha, \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}}, \frac{\alpha^3}{\sqrt{3!}}, \dots\right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \cdot \left(\alpha, \sqrt{2} \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}}, \sqrt{3} \frac{\alpha^3}{\sqrt{3!}}, \dots\right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \cdot \alpha \cdot \left(1, \alpha, \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}}, \frac{\alpha^3}{\sqrt{3!}}, \dots\right) \\ &= \alpha \cdot e(\alpha). \end{aligned} \quad (1.55)$$

■

Die Glaubervektoren $e(\alpha)$ sind also Eigenvektoren des Vernichters A zum Eigenwert α . In der physikalischen Dirac-Notation (FEYNMAN [38]) wird dieser Sachverhalt durch die Gleichung

$$A |e(\alpha)\rangle = \alpha |e(\alpha)\rangle \quad (1.56)$$

ausgedrückt. Allerdings findet sich in physikalischen Texten auch noch die Gleichung

$$\langle e(\alpha)| A^* = \langle e(\alpha)| \bar{\alpha}, \quad (1.57)$$

die als Eigenwertgleichung für den Erzeuger bezeichnet wird. Dies ist nicht richtig. Richtig ist vielmehr, daß (1.57) ein adjungierter Ausdruck von (1.56) ist: Der Ausdruck $\langle e(\alpha)|$, ein sogenannter *Bra-Vektor*, ist das von $e(\alpha)$ erzeugte lineare Funktional $\langle \cdot, e(\alpha) \rangle$:

$$\langle e(\alpha)| : \mathcal{F}_+(\mathbb{C}) \ni e(\beta) \mapsto \langle e(\beta), e(\alpha) \rangle \in \mathbb{C}. \quad (1.58)$$

Dann entspricht $\langle e(\alpha)| A^*$ der Verkettung $\langle \cdot, e(\alpha) \rangle \circ A^*$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \langle e(\alpha)| A^* &\cong \langle \cdot, e(\alpha) \rangle \circ A^* \\ &= \langle A^* \cdot, e(\alpha) \rangle \\ &= \langle \cdot, A e(\alpha) \rangle \\ &= \langle \cdot, \alpha e(\alpha) \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle \cdot, e(\alpha) \rangle \\ &\cong \langle e(\alpha)| \bar{\alpha}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

1.4 Spurklasseoperatoren im Hilbertraum

Es sei \mathcal{H} ein Hilbertraum und $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ die Menge der beschränkten, linearen Operatoren auf \mathcal{H} . Es sei $\mathcal{B}_+(\mathcal{H}) := \{T \in \mathcal{B} : T \geq 0\}$.

1.4.1 Die Spur auf $\mathcal{B}_+(\mathcal{H})$: Es sei $(e_i)_{i \in I}$ eine Orthonormalbasis (ONB) von \mathcal{H} . Wir definieren die Abbildung tr durch

$$\text{tr} : \mathcal{B}_+(\mathcal{H}) \rightarrow [0, \infty], \quad T \mapsto \text{tr} \{T\} := \sum_{i \in I} \langle T e_i, e_i \rangle \quad (1.60)$$

und nennen sie die *Spur* auf $\mathcal{B}_+(\mathcal{H})$. Der Wert der Reihe ist unabhängig von der Wahl der ONB von \mathcal{H} (REED UND SIMON [26], Abschnitt VI.6). Es gilt also $\text{tr} \{T\} = \text{tr} \{U^* T U\}$ für alle unitären Operatoren $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

1.4.2 Die Spur auf $\mathcal{T}(\mathcal{H})$: Es sei

$$\mathcal{T}(\mathcal{H}) := \left\{ T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \text{tr} \left\{ \sqrt{T^* T} \right\} < \infty \right\} \quad (1.61)$$

die Menge der *Spurklasseoperatoren auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$* . Für ein $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ heißt

$$\|T\|_{\text{tr}} := \text{tr} \left\{ \sqrt{T^* T} \right\} \quad (1.62)$$

die *Spurnorm von T* .

1.4.3 Eigenschaften von Spurklasseoperatoren:

- (i) Die Spurnorm $\|\cdot\|_{\text{tr}}$ ist eine Norm und $(\mathcal{T}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{\text{tr}})$ ein Banachraum.
- (ii) Es gilt $\|T\| \leq \|T\|_{\text{tr}}$ für alle $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$.
- (iii) Die Spur tr auf $\mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ lässt sich auf $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ fortsetzen. Es sei $(e_i)_{i \in I}$ eine ONB von \mathcal{H} . Wir definieren die Abbildung tr , die *Spur* auf $\mathcal{T}(\mathcal{H})$, durch

$$\text{tr} : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad T \mapsto \text{tr} \{T\} := \sum_{i \in I} \langle T e_i, e_i \rangle. \quad (1.63)$$

Die Reihe konvergiert absolut, und der Wert ist unabhängig von der Wahl der ONB. Es ist $|\text{tr} \{T\}| \leq \|T\|_{\text{tr}}$ für alle $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$.

- (iv) Ist $T \geq 0$, so ist $\sqrt{T^* T} = T$ und $|\text{tr} \{T\}| = \|T\|_{\text{tr}}$. Außerdem gilt

$$\text{tr} \{TB\} = \text{tr} \{BT\} \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}), B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \quad (1.64)$$

(v) Es sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ fest, dann ist

$$\mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}, T \mapsto \operatorname{tr} \{AT\} \quad (1.65)$$

eine stetige Linearform auf $(\mathcal{T}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{\operatorname{tr}})$. Ist umgekehrt $\varphi : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ eine bezüglich der Spurnorm stetige Linearform, dann gibt es ein $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit

$$\varphi(T) = \operatorname{tr} \{AT\} \quad (1.66)$$

für alle $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$. Wegen $\|A\| = \|\varphi\| := \sup\{|\varphi(T)| : T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}), \|T\|_{\operatorname{tr}} \leq 1\}$ ist $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{T}(\mathcal{H})^*$ der Dualraum von $\mathcal{T}(\mathcal{H})$.

Für weitere Eigenschaften der Spurklasseoperatoren und Beweise der obigen Aussagen siehe KÜMMERER [10] (Kapitel 2), REED UND SIMON [26] (Abschnitt VI.6) und PARTHASARATHY [23].

1.4.4 Dichteoperatoren: Es seien für alle $i \in \mathbb{N}$ $\varphi_i \in \mathcal{H}$, $\|\varphi_i\| = 1$, $\lambda_i \geq 0$ und $\sum_i \lambda_i = 1$. Es sei P_{φ_i} die orthogonale Projektion auf φ_i . Dann konvergiert die Reihe $\Phi := \sum_i \lambda_i P_{\varphi_i}$ in der Spurnorm und es gilt:

- (i) $\Phi \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, $\Phi \geq 0$, $\operatorname{tr} \{\Phi\} = 1$;
- (ii) $\operatorname{tr} \{\Phi A\} = \sum_i \lambda_i \langle A\varphi_i, \varphi_i \rangle$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Ist $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, $T \geq 0$, $\operatorname{tr} \{T\} = 1$, dann gibt es für alle $i \in \mathbb{N}$ Vektoren $\psi_i \in \mathcal{H}$ mit $\|\psi_i\| = 1$ und Zahlen $\mu_i \geq 0$ mit $\sum_i \mu_i = 1$ so, daß $T = \sum_i \mu_i P_{\psi_i}$ und die Reihe in der Spurnorm konvergiert. Die ψ_i sind als orthonormal wählbar.

Der Operator $\Phi := \sum_i \lambda_i P_{\varphi_i}$ heißt *Dichteoperator* oder *gemischter Zustand*. Dichteoperatoren sind also selbstadjungierte, positive, normierte Spurklasseoperatoren:

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) := \{T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}) : T \geq 0, \operatorname{tr} \{T\} = 1\}. \quad (1.67)$$

Für einen Dichteoperator $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ ist die Abbildung

$$\varphi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}, A \mapsto \varphi(A) := \operatorname{tr} \{AT\} \quad (1.68)$$

ein positives, stetiges und lineares Funktional auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\varphi(\mathbb{1}) = 1$. Es ist sogar σ^* -stetig.

1.4.5 Lemma: Ist umgekehrt φ ein positives, stetiges und lineares Funktional auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\varphi(\mathbb{1}) = 1$, so existiert nur dann ein Dichteoperator $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ mit $\varphi(A) = \operatorname{tr} \{AT\}$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, wenn das Funktional außerdem noch *normal* ist, d. h., wenn es in der σ^* -Operatortopologie stetig ist, oder äquivalent dazu $\varphi(A) = \sup_i \varphi(A_i)$, wenn $A_i \nearrow A$.

1.4.6 Geometrie der Dichteoperatoren: Die Dichteoperatoren bilden eine konvexe Menge, d. h., wenn S und T Dichteoperatoren sind, dann ist für alle $0 < \lambda < 1$ auch $\lambda S + (1 - \lambda)T$ ein Dichteoperator. Ein *Extremalpunkt* von $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ ist ein Dichteoperator R derart, daß aus $R = \lambda S + (1 - \lambda)T$ folgt, daß $R = S = T$ ist.

Die Extremalpunkte von $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ heißen *reine Zustände* und haben die Form einer orthogonalen Projektion

$$P_\psi : \varphi \rightarrow \langle \varphi, \psi \rangle \psi, \quad (1.69)$$

mit $\psi \in \mathcal{H}$ und $\|\psi\| = 1$.

Die orthogonale Projektion $P_{e(\psi)}$ auf den Glaubervektor $e(\psi)$ heißt auch *kohärenter Zustand*. In physikalischen Texten findet man hierfür die Schreibweisen

$$|\psi\rangle \langle \psi| := |e(\psi)\rangle \langle e(\psi)| := P_{e(\psi)}. \quad (1.70)$$

Zum Beweis der Aussagen über Dichteoperatoren siehe KÜMMERER [10] (Kapitel 2).

1.5 Klassische Zustände im symmetrischen Fockraum

Wir werden im folgenden den für diese Arbeit zentralen Begriff entwickeln, nämlich den der *klassischen Zustände*. Wir werden dabei der Seminararbeit von BÖHRINGER [2] folgen, die sich ihrerseits an DAVIES [7] orientiert.

1.5.1 Lemma: Es sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_+(\mathbb{C}^n))$. Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} : \alpha \mapsto \text{tr} \{AP_{e(\alpha)}\} \quad (1.71)$$

stetig, beschränkt und positiv.

Beweis: Die Stetigkeit der Abbildung ist klar, da nur stetige Abbildungen verkettet werden.

Die Beschränktheit gilt wegen

$$\text{tr} \{AP_{e(\alpha)}\} \leq \|AP_{e(\alpha)}\|_{\text{tr}} \leq \|A\| \cdot \|P_{e(\alpha)}\|_{\text{tr}} = \|A\|. \quad (1.72)$$

Die Abbildung ist positiv, da mit $A \geq 0$ gilt:

$$\text{tr} \{AP_{e(\alpha)}\} = \langle Ae(\alpha), e(\alpha) \rangle \geq 0. \quad (1.73)$$

■

1.5.2 Lemma: Es sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{C}^n . Dann ist die Abbildung

$$\Phi_\mu : \mathcal{B}(\mathcal{F}_+(\mathbb{C}^n)) \rightarrow \mathbb{C} : A \mapsto \int_{\mathbb{C}^n} \operatorname{tr} \{AP_{e(\alpha)}\} d\mu(\alpha) \quad (1.74)$$

ein positives, normiertes, normales und lineares Funktional.

Beweis: Die Existenz des Integrals liefern die Stetigkeit und Beschränktheit des Integranden:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{C}^n} \operatorname{tr} \{AP_{e(\alpha)}\} d\mu(\alpha) \right| &\leq \int_{\mathbb{C}^n} |\operatorname{tr} \{AP_{e(\alpha)}\}| d\mu(\alpha) \\ &\leq \int_{\mathbb{C}^n} \|AP_{e(\alpha)}\|_{\operatorname{tr}} d\mu(\alpha) \\ &\leq \|A\| \int_{\mathbb{C}^n} 1 d\mu(\alpha) \\ &= \|A\|. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Die Linearität ergibt sich aus der Linearität der Spur.

Für die Positivität sei $A \geq 0$, dann gilt:

$$\int_{\mathbb{C}^n} \operatorname{tr} \{AP_{e(\alpha)}\} d\mu(\alpha) = \int_{\mathbb{C}^n} \underbrace{\langle Ae(\alpha), e(\alpha) \rangle}_{\geq 0} d\mu(\alpha) \geq 0. \quad (1.76)$$

Die Normiertheit ergibt sich aus der Tatsache, daß eine positive, stetige Linearform ihre Norm auf der $\mathbb{1}$ annimmt:

$$\|\varphi\| = \varphi(\mathbb{1}) = \int_{\mathbb{C}^n} \operatorname{tr} \{\mathbb{1}P_{e(\alpha)}\} d\mu(\alpha) = \int_{\mathbb{C}^n} \langle e(\alpha), e(\alpha) \rangle d\mu(\alpha) = \int_{\mathbb{C}^n} 1 d\mu(\alpha) = 1. \quad (1.77)$$

Zum Beweis der Normalität sei $(A_i)_{i \in I}$ für eine Indexmenge I ein monoton fallendes Netz mit $\inf_i A_i = 0$. Es sei o. B. d. A. $A_i \leq \mathbb{1} \forall i \in I$. Behauptung: $\lim_i \Phi_\mu(A_i) = 0$.

Wir definieren

$$f_i : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ : \alpha \mapsto \operatorname{tr} \{A_i P_{e(\alpha)}\} = \langle A_i e(\alpha), e(\alpha) \rangle. \quad (1.78)$$

Da A_i schwach gegen 0 konvergiert, gilt $\lim_i f_i(\alpha) = 0 \forall \alpha \in \mathbb{C}^n$ und o. B. d. A. $f_i \leq 1 \forall i \in I$. Außerdem sind die f_i stetig, da sie Kompositionen stetiger Funktionen sind, nämlich $\alpha \mapsto e(\alpha) \mapsto \langle A_i e(\alpha), e(\alpha) \rangle$. Nach dem Satz von DINI gilt, daß f_i auf jeder kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{C}^n$ sogar gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Es sei nun $\varepsilon \geq 0$ und $K \subseteq \mathbb{C}^n$ so kompakt, daß

$$\mu(\mathbb{C}^n \setminus K) \leq \varepsilon/2. \quad (1.79)$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von f_i auf K folgt: Es gibt ein $i_0 \in I$ so, daß für alle $i \geq i_0$

$$f_i|_K \leq \varepsilon/2. \quad (1.80)$$

Somit gilt für alle $i \geq i_0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}^n} f_i(\alpha) \, d\mu(\alpha) &= \int_K \underbrace{f_i(\alpha)}_{\leq \varepsilon/2} \, d\mu(\alpha) + \int_{\mathbb{C}^n \setminus K} \underbrace{f_i(\alpha)}_{\leq 1} \, d\mu(\alpha) \\ &\leq \varepsilon/2 \mu(K) + \mu(\mathbb{C}^n \setminus K) \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon \end{aligned} \quad (1.81)$$

■

Da die Abbildung Φ_μ ein positives, normiertes und normales lineares Funktional ist, existiert nach Lemma 1.4.5 ein Dichteoperator $\varrho \in \mathcal{S}(\mathcal{F}_+(\mathbb{C}^n))$ so, daß $\varphi(A) = \text{tr}\{\varrho A\}$. Damit lassen sich nun die *klassischen Zustände* definieren:

1.5.3 Satz und Definition: (klassische Zustände) Es sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{C}^n und Φ_μ wie oben definiert. Dann existiert ein $\varrho_\mu \in \mathcal{S}(\mathcal{F}_+(\mathbb{C}^n))$ mit

$$\Phi_\mu(T) = \text{tr}\{\varrho_\mu T\} \quad (1.82)$$

für alle $T \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_+(\mathbb{C}^n))$. Die so gewonnenen Zustände ϱ_μ schreibt man abkürzend als

$$\varrho_\mu := \int_{\mathbb{C}^n} P_{e(\alpha)} \, d\mu(\alpha) \quad (1.83)$$

und nennt sie *klassische Zustände*.

Beweis: Der Beweis ist eine Anwendung von Lemma 1.4.5. ■

1.5.4 Geometrie der klassischen Zustände: Abbildung 1.1 zeigt eine optische Hilfestellung für die Geometrie der klassischen Zustände. Die klassischen Zustände bilden eine konvexe Teilmenge des Zustandsraumes $\mathcal{S}(\mathcal{F}_+(\mathbb{C}^n))$.

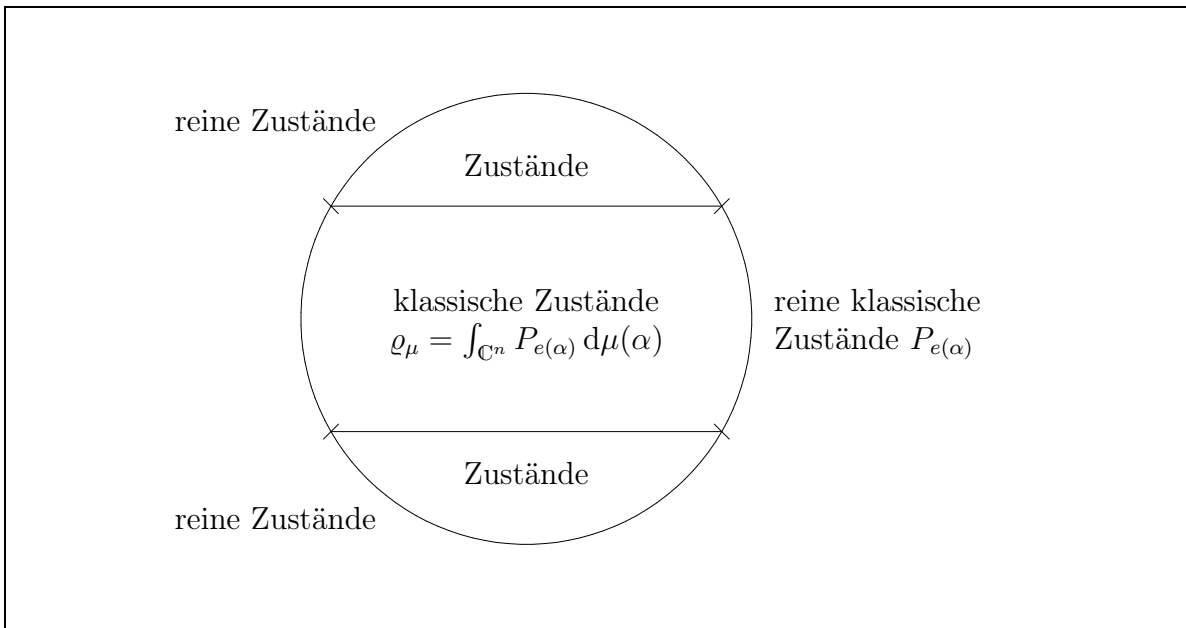


Abbildung 1.1: Die Geometrie der Zustände auf dem symmetrischen Fockraum

Ein *reiner (klassischer) Zustand* auf \mathcal{F} ist ein klassischer Zustand, der die Form $P_{e(\alpha)}$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}^n$ besitzt. Die reinen klassischen Zustände sind also genau die kohärenten Zustände. Man kann sich klassische Zustände also auch als kontinuierliche Konvexkombinationen von kohärenten Zuständen vorstellen.

Kapitel 2

P-Darstellung

Wir werden im folgenden die Aussagen über die Quasi-Wahrscheinlichkeitsdarstellungen, wie sie in vielen Physikbüchern zu finden sind, mathematisch formulieren. Die rein physikalische Formulierung kann man recht übersichtlich z. B. in GARDINER [63], CARMICHAEL [61] oder in CAHILL UND GLAUBER [60] nachlesen. Die erste Quasi-Wahrscheinlichkeitsdarstellung, mit der wir uns beschäftigen werden, ist die P-Darstellung, die sich fast automatisch aus unseren mathematischen Vorüberlegungen ergibt.

2.1 Definition und Eigenschaften

Eine typische, physikalische Definition der P-Darstellung findet sich in GARDINER [63]:

„The density operator corresponding to a coherent state $|\alpha\rangle$ is of course given by $|\alpha\rangle\langle\alpha|$. It might happen that the variable α is not well defined, and we may wish to consider an ensemble of coherent states; that is, we may want to consider a density operator of the form

$$\varrho = \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle\langle\alpha|.$$

Diese Darstellung von Dichteoperatoren als Konvexkombination kohärenter Zustände mittels Gewichtungsfunktion $P(\alpha, \alpha^*)$ heißt *P-Darstellung* oder nach ihren „Entdeckern“ *Glauber-Sudarshan-Darstellung*. GLAUBER [67] und SUDRASHAN [80] haben 1963 unabhängig voneinander gezeigt, daß eine solche Darstellung für eine große Klasse von Dichteoperatoren ϱ existiert. KLAUDER ET AL. [72] zeigten 1965, daß die P-Darstellung sogar für jedes ϱ existiert, wenn man für $P(\alpha, \alpha^*)$ auch verallgemeinerte Funktionen zuläßt. Dieser Aussage muß jedoch aus mathematischer Sicht mit Skepsis begegnet werden.

Bevor wir die P-Darstellung mathematisch formulieren können, müssen wir zunächst die einzelnen Begriffe aus der physikalischen Sprache, wie sie sich im obigen Zitat findet, in die Sprache der Mathematik übersetzen: Die kohärenten Zustände $|\alpha\rangle$ entsprechen den Glaubervektoren $e(\alpha) \in \mathcal{F}_+(\mathbb{C})$. Der zugehörige Dichteoperator $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ ist der reine klassische Zustand $P_{e(\alpha)}$, d. h. die orthogonale Projektion auf den Glaubervektor $e(\alpha)$. Mit $d^2\alpha$ wird die Integration über die komplexe Ebene bezeichnet.

Damit und mit der Definition der klassischen Zustände kann man die P-Darstellung nun mathematisch folgendermaßen formulieren:

2.1.1 Definition: (P-Darstellung) Es seien $\mathcal{H} = \mathbb{C}$, $\varrho \in \mathcal{S}(\mathcal{F}_+(\mathbb{C}))$ ein Zustand auf dem symmetrischen Fockraum $\mathcal{F}_+(\mathbb{C})$ und μ_p ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf den Borelmengen von \mathbb{C} . Falls ϱ sich als

$$\varrho = \int_{\mathbb{C}} P_{e(\alpha)} d\mu_p(\alpha) \quad (2.1)$$

schreiben läßt, dann nennt man diese Darstellung *P-Darstellung*. Der Index p des Maßes μ zeigt an, daß es sich um das zur P-Darstellung gehörende Maß handelt.

Falls das Maß μ_p eine Dichte $p(\alpha) \in L^1(\mathbb{C}, \lambda)$ bezüglich des Lebesguemaßes λ besitzt, d. h., $d\mu_p(\alpha) = p(\alpha) d\lambda(\alpha)$, dann läßt sich der Zustand ϱ folgendermaßen schreiben:

$$\varrho = \int_{\mathbb{C}} p(\alpha) P_{e(\alpha)} d\lambda(\alpha). \quad (2.2)$$

Man nennt die Funktion $p(\alpha)$ dann die *P-Funktion*.

2.1.2 Bemerkung: Diese Darstellung läßt sich nur in Zusammenhang mit der Definition der klassischen Zustände aus Satz 1.5.3 verstehen: Der Ausdruck

$$\varrho = \int_{\mathbb{C}} P_{e(\alpha)} d\mu_p(\alpha) \quad (2.3)$$

isteine Kurzschreibweise für die Gleichung $\text{tr} \{T\varrho\} = \int_{\mathbb{C}} \text{tr} \{TP_{e(\alpha)}\} d\mu_p(\alpha)$.

mit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_+(\mathbb{C}))$. Alle weiteren Gleichungen von dieser Bauart müssen wir dementsprechend mit Hilfe der Spur lesen. Außerdem kann man erkennen, daß gerade die klassischen Zustände diejenigen Zustände sind, für die eine P-Darstellung existiert.

2.1.3 Unterschied zur Physik: In den physikalischen Texten (z. B. GARDINER [63], CARMICHAEL [61]) ist in der Regel nur von P-Funktionen die Rede. Der Fall, daß das Maß gar keine Dichte besitzt, wird übergangen. Selbst in Fällen, in denen aus mathematischer Sicht nur ein Ausdruck mit einem Maß sinnvoll ist, stehen in Physikbüchern noch P-Funktionen, die aber eigentlich keine mehr sind. Siehe hierzu auch Beispiel 2.2.1 weiter unten.

2.1.4 Proposition: Die P-Funktion ist normiert, d. h.,

$$\int_{\mathbb{C}} p(\alpha) \, d\lambda(\alpha) = 1. \quad (2.4)$$

Dies entspricht der Normierung einer klassischen Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Beweis: Da ϱ ein Zustand ist, gilt $\text{tr} \{\varrho\} = 1$. Damit ergibt sich:

$$1 = \text{tr} \{\varrho\} = \text{tr} \{\varrho \mathbb{1}\} = \int_{\mathbb{C}} p(\alpha) \underbrace{\text{tr} \{P_{e(\alpha)} \mathbb{1}\}}_{=1} \, d\lambda(\alpha) = \int_{\mathbb{C}} p(\alpha) \, d\lambda(\alpha). \quad (2.5)$$

■

2.1.5 Erwartungswerte normal geordneter Produkte: Es seien A^* und A die Erzeuger und Vernichter auf $\mathcal{F}_+(\mathbb{C})$. Dann gilt mit $r, s \in \mathbb{N}$:

$$\text{tr} \{(A^*)^r A^s \varrho\} = \int_{\mathbb{C}} \bar{\alpha}^r \alpha^s \, d\mu_p(\alpha), \quad (2.6)$$

d. h., die Erwartungswerte *normal geordneter* Produkte von Erzeugern und Vernichtern sind einfach Momente der P-Darstellung. Dabei bedeutet *normal geordnet*, daß alle Potenzen von A^* links von allen Potenzen von A stehen.

Dies ist die für die Physik entscheidende Eigenschaft. Wann immer Erwartungswerte normal geordneter Produkte von Operatoren von Bedeutung sind, liefert die P-Darstellung eine einfache Möglichkeit, diese zu berechnen. Ein wichtiges Beispiel hierfür ist die Quantenoptik, in der normal geordnete Produkte eine wichtige Rolle spielen und dementsprechend von der P-Darstellung sehr häufig Verwendung gemacht wird (siehe z. B. SCULLY UND ZUBAIRY [81], WALLS UND MILBURN [82]).

Beweis: Aus der Definition der Glaubervektoren auf $\mathcal{F}_+(\mathbb{C}) \simeq \ell^2(\mathbb{N})$,

$$e(\alpha) := e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \cdot \left(1, \alpha, \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}}, \frac{\alpha^3}{\sqrt{3!}}, \dots \right), \quad (2.7)$$

ergibt sich die orthogonale Projektion $P_{e(\alpha)}$ zu

$$P_{e(\alpha)} = e^{-|\alpha|^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \frac{\bar{\alpha}^2}{\sqrt{2}} & \frac{\bar{\alpha}^3}{\sqrt{6}} & \cdots \\ \alpha & \bar{\alpha}\alpha & \frac{\bar{\alpha}\alpha^2}{\sqrt{2}} & \frac{\bar{\alpha}\alpha^3}{\sqrt{6}} & \cdots \\ \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} & \frac{\bar{\alpha}^2\alpha}{\sqrt{2}} & \frac{\bar{\alpha}^2\alpha^2}{2} & \frac{\bar{\alpha}^2\alpha^3}{\sqrt{6}} & \cdots \\ \frac{\alpha^3}{\sqrt{6}} & \frac{\bar{\alpha}^3\alpha}{\sqrt{6}} & \frac{\bar{\alpha}^3\alpha^2}{2\sqrt{3}} & \frac{\bar{\alpha}^3\alpha^3}{6} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Damit haben die Produkte $AP_{e(\alpha)}$ und $P_{e(\alpha)}A^*$ die Form

$$\begin{aligned} AP_{e(\alpha)} &= e^{-|\alpha|^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \sqrt{2} & & \\ & & 0 & \sqrt{3} & \\ & & & 0 & \sqrt{4} \\ & & & & 0 & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \frac{\bar{\alpha}^2}{\sqrt{2}} & \frac{\bar{\alpha}^3}{\sqrt{6}} & \cdots \\ \alpha & \bar{\alpha}\alpha & \frac{\bar{\alpha}\alpha^2}{\sqrt{2}} & \frac{\bar{\alpha}\alpha^3}{\sqrt{6}} & \cdots \\ \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} & \frac{\bar{\alpha}^2\alpha}{\sqrt{2}} & \frac{\bar{\alpha}^2\alpha^2}{2} & \frac{\bar{\alpha}^2\alpha^3}{\sqrt{6}} & \cdots \\ \frac{\alpha^3}{\sqrt{6}} & \frac{\bar{\alpha}^3\alpha}{\sqrt{6}} & \frac{\bar{\alpha}^3\alpha^2}{2\sqrt{3}} & \frac{\bar{\alpha}^3\alpha^3}{6} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\ &= e^{-|\alpha|^2} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 & \frac{\alpha^3}{\sqrt{2}} & \frac{\alpha^4}{\sqrt{6}} & \cdots \\ \bar{\alpha}\alpha & \bar{\alpha}\alpha^2 & \frac{\bar{\alpha}\alpha^3}{\sqrt{2}} & \frac{\bar{\alpha}\alpha^4}{\sqrt{6}} & \cdots \\ \frac{\bar{\alpha}^2\alpha}{\sqrt{2}} & \frac{\bar{\alpha}^2\alpha^2}{\sqrt{2}} & \frac{\bar{\alpha}^2\alpha^3}{2} & \frac{\bar{\alpha}^2\alpha^4}{\sqrt{6}} & \cdots \\ \frac{\bar{\alpha}^3\alpha}{\sqrt{6}} & \frac{\bar{\alpha}^3\alpha^2}{\sqrt{6}} & \frac{\bar{\alpha}^3\alpha^3}{2\sqrt{3}} & \frac{\bar{\alpha}^3\alpha^4}{6} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \alpha P_{e(\alpha)}; \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} P_{e(\alpha)}A^* &= e^{-|\alpha|^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \frac{\bar{\alpha}^2}{\sqrt{2}} & \frac{\bar{\alpha}^3}{\sqrt{6}} & \cdots \\ \alpha & \bar{\alpha}\alpha & \frac{\bar{\alpha}\alpha^2}{\sqrt{2}} & \frac{\bar{\alpha}\alpha^3}{\sqrt{6}} & \cdots \\ \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} & \frac{\bar{\alpha}^2\alpha}{\sqrt{2}} & \frac{\bar{\alpha}^2\alpha^2}{2} & \frac{\bar{\alpha}^2\alpha^3}{\sqrt{6}} & \cdots \\ \frac{\alpha^3}{\sqrt{6}} & \frac{\bar{\alpha}^3\alpha}{\sqrt{6}} & \frac{\bar{\alpha}^3\alpha^2}{2\sqrt{3}} & \frac{\bar{\alpha}^3\alpha^3}{6} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & \sqrt{2} & 0 & & \\ & & \sqrt{3} & 0 & \\ & & & \sqrt{4} & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \\ &= e^{-|\alpha|^2} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\alpha}\alpha & \frac{\bar{\alpha}\alpha^2}{\sqrt{2}} & \frac{\bar{\alpha}\alpha^3}{\sqrt{6}} & \cdots \\ \bar{\alpha}^2 & \bar{\alpha}^2\alpha & \frac{\bar{\alpha}^2\alpha^2}{\sqrt{2}} & \frac{\bar{\alpha}^2\alpha^3}{\sqrt{6}} & \cdots \\ \frac{\bar{\alpha}^3}{\sqrt{2}} & \frac{\bar{\alpha}^3\alpha}{\sqrt{2}} & \frac{\bar{\alpha}^3\alpha^2}{2} & \frac{\bar{\alpha}^3\alpha^3}{\sqrt{6}} & \cdots \\ \frac{\bar{\alpha}^4}{\sqrt{6}} & \frac{\bar{\alpha}^4\alpha}{\sqrt{6}} & \frac{\bar{\alpha}^4\alpha^2}{2\sqrt{3}} & \frac{\bar{\alpha}^4\alpha^3}{6} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \bar{\alpha} P_{e(\alpha)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Mit Hilfe dieser Wirkungen können wir nun den Erwartungswert von $(A^*)^r A^s$ berechnen:

$$\begin{aligned}
\text{tr} \{(A^*)^r A^s \varrho\} &= \int_{\mathbb{C}} \text{tr} \{(A^*)^r A^s P_{e(\alpha)}\} d\mu_p(\alpha) \\
&\stackrel{(*)}{=} \int_{\mathbb{C}} \text{tr} \{A^s P_{e(\alpha)} (A^*)^r\} d\mu_p(\alpha) \\
&\stackrel{(2.9)}{=} \int_{\mathbb{C}} \alpha^s \text{tr} \{P_{e(\alpha)} (A^*)^r\} d\mu_p(\alpha) \\
&\stackrel{(2.10)}{=} \int_{\mathbb{C}} \alpha^s \bar{\alpha}^r \underbrace{\text{tr} \{P_{e(\alpha)}\}}_{=1} d\mu_p(\alpha) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \alpha^s \bar{\alpha}^r d\mu_p(\alpha)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Bei der Identität (*) haben wir die Invarianz der Spur unter zyklischer Permutation verwendet.

Eine weitere Möglichkeit, diesen Beweis zu führen, liefert die Wirkung des Vernichters auf die Glaubervektoren aus Gleichung (1.56):

$$\begin{aligned}
\text{tr} \{(A^*)^r A^s \varrho\} &= \int_{\mathbb{C}} \text{tr} \{(A^*)^r A^s P_{e(\alpha)}\} d\mu_p(\alpha) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \langle (A^*)^r A^s e(\alpha), e(\alpha) \rangle d\mu_p(\alpha) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \langle A^s e(\alpha), A^r e(\alpha) \rangle d\mu_p(\alpha) \\
&\stackrel{(1.56)}{=} \int_{\mathbb{C}} \alpha^s \langle e(\alpha), A^r e(\alpha) \rangle d\mu_p(\alpha) \\
&\stackrel{(1.56)}{=} \int_{\mathbb{C}} \alpha^s \bar{\alpha}^r \underbrace{\langle e(\alpha), e(\alpha) \rangle}_{=1} d\mu_p(\alpha) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \alpha^s \bar{\alpha}^r d\mu_p(\alpha)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

■

2.1.6 Unterschied zur Physik: In Physikbüchern steht diese Aussage nur für die P-Funktion:

$$\text{tr} \{(A^*)^r A^s \varrho\} = \int_{\mathbb{C}} p(\alpha) \bar{\alpha}^r \alpha^s d\lambda(\alpha), \tag{2.13}$$

d. h., die Erwartungswerte normal geordneter Operatoren werden als Momente der P-Funktion verstanden.

2.2 Beispiele

2.2.1 Reiner Zustand: Für einen reinen Zustand der Form $P_{e(\beta)}$ lautet die P-Darstellung

$$P_{e(\beta)} = \int_{\mathbb{C}} P_{e(\alpha)} d_{\beta}(\alpha) \quad (2.14)$$

mit dem Punktmaß $d_{\beta}(\alpha)$.

Viele Physikbücher geben auch für einen reinen Zustand eine „P-Funktion“ an, nämlich die Delta-Funktion

$$p(\alpha) = \delta(\alpha - \beta) = \begin{cases} \infty & \text{falls } \beta = \alpha, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ; \quad \int_{\mathbb{C}} \delta(\alpha) d\mu(\alpha) = 1, \quad (2.15)$$

doch diese ist nach unserer Definition keine Dichte bezüglich des Lebesguemaßes. Eine Delta-Funktion als P-Funktion müssen wir also als Punktmaß an der entsprechenden Stelle lesen.

2.2.2 Gibbs-Zustand: In diesem Beispiel geht es um Gleichgewichtszustände. Befindet sich ein System mit konstanter Gesamtenergie in einem thermischen Gleichgewicht, so kann man dieses System durch den sogenannten *Gibbs-Zustand* beschreiben.

Jetzt könnte man sich dafür interessieren, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß sich ein Einzelsystem in einem bestimmten Energiezustand befindet. Um dies zu beantworten, kann man sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung anschauen, die zu diesem Gibbs-Zustand gehört. Ein wichtiges, bekanntes Beispiel für solche Verteilungen ist die Energieverteilung der Wärmestrahlung, also das Planck'sche Strahlungsgesetz. Wie sieht also die zum Gibbs-Zustand gehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung aus?

2.2.3 Definition: Der Hilbertraum des harmonischen Oszillators der Energie $\hbar\omega$ ist $\mathcal{F}_+(\mathbb{C}) \simeq \ell^2(\mathbb{N})$. Es wird $\hbar\omega = 1$ gesetzt. Der *Gibbs-Zustand* $\varrho(\beta)$ auf $\mathcal{S}(\mathcal{F}_+(\mathbb{C}))$ zur inversen Temperatur $\beta = 1/kT$ (k ist die Boltzmann-Konstante, T die absolute Temperatur) wird definiert durch

$$\varrho(\beta) := \frac{e^{-\beta d\Gamma_+(S)}}{\text{tr} \{e^{-\beta d\Gamma_+(S)}\}}, \quad (2.16)$$

wobei $d\Gamma_+(S)$ die 2. (symmetrische) Quantisierung 2. Art des Einteilchenoperators $S = \mathbb{1}$ bezeichnet.

Für $S = \mathbb{1}$ lautet die n -te Stufe der 2. Quantisierung

$$\begin{aligned} (d\Gamma_+(S))_n &= (S \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}) + (\mathbb{1} \otimes S \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}) + \cdots + (\mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \otimes S) \\ &= n \mathbb{1}^{\otimes n}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Der Operator $d\Gamma_+(S)$ lautet demnach in Diagonalgestalt

$$(d\Gamma_+(S))_{mn} = n \delta_{mn}. \quad (2.18)$$

Damit gilt

$$\text{tr} \{ e^{-\beta d\Gamma_+(S)} \} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta})^n = \frac{1}{1 - e^{-\beta}}. \quad (2.19)$$

Also sieht die Matrix des Gibbs-Zustandes $\varrho(\beta)$ folgendermaßen aus:

$$\varrho(\beta) = (1 - e^{-\beta}) \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & e^{-\beta} & & & \\ & & e^{-2\beta} & & \\ & & & e^{-3\beta} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Die Matrixelemente dieser Matrix lauten

$$(\varrho(\beta))_{mn} = \delta_{mn} (1 - e^{-\beta}) e^{-n\beta}. \quad (2.21)$$

2.2.4 Satz: Der Gibbs-Zustand $\varrho(\beta)$ mit den Matrixelementen

$$(\varrho(\beta))_{mn} = \delta_{mn} (1 - e^{-\beta}) e^{-n\beta} \quad (2.22)$$

ist der klassische Zustand auf $\mathcal{F}_+(\mathbb{C}) \simeq \ell^2(\mathbb{N})$, zu dem die Gauß'sche Wahrscheinlichkeitsverteilung, d. h. die P-Funktion

$$p(x, y) = \frac{1}{\pi} (e^\beta - 1) \exp \{ - (e^\beta - 1) (x^2 + y^2) \}, \quad (2.23)$$

auf \mathbb{R}^2 gehört.

Beweis: Es sei $\{e_j : e_j(k) = \delta_{jk}\}$ eine Orthonormalbasis des $\ell^2(\mathbb{N})$. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ seien $x := \text{Re}(\alpha)$ und $y := \text{Im}(\alpha)$. Es sei ϱ der klassische Zustand

$$\varrho = \int_{\mathbb{R}^2} p(x, y) P_{e(\alpha)} dx dy \quad (2.24)$$

mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$p(x, y) := \frac{1}{2\pi} a \exp \left\{ -\frac{1}{2} a (x^2 + y^2) \right\}; \quad a \in \mathbb{R}. \quad (2.25)$$

Die n -te Komponente des Glaubervektors $e(\alpha)$ lautet

$$(e(\alpha))_n = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{1}{\sqrt{n!}} \alpha^n. \quad (2.26)$$

Damit ergibt sich für die Matrixelemente des klassischen Zustandes

$$\begin{aligned}
\langle \varrho e_m, e_n \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} a \exp \left\{ -\frac{1}{2} a (x^2 + y^2) \right\} \langle e(\alpha), e_n \rangle \langle e_m, e(\alpha) \rangle dx dy \\
&= \frac{1}{2\pi} a \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} a (x^2 + y^2) \right\} (e(\bar{\alpha}))_n (e(\alpha))_m dx dy \\
&= \frac{1}{2\pi} a \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} a (x^2 + y^2) \right\} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{1}{\sqrt{n!}} \bar{\alpha}^n e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{1}{\sqrt{m!}} \alpha^m dx dy \\
&= \frac{1}{2\pi} a \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{m!}} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} a (x^2 + y^2) \right\} e^{-|\alpha|^2} \bar{\alpha}^n \alpha^m dx dy.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Eine Transformation auf Polarkoordinaten mit $r^2 = x^2 + y^2$ und $\alpha = r \cdot e^{i\varphi}$ liefert

$$\begin{aligned}
\langle \varrho e_m, e_n \rangle &= \frac{1}{2\pi} a \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{m!}} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} a r^2 \right\} e^{-r^2} (r \cdot e^{-i\varphi})^n (r \cdot e^{i\varphi})^m r d\varphi dr \\
&= \frac{1}{2\pi} a \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{m!}} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2(1+\frac{a}{2})} \cdot r^n \cdot r^m \cdot r \cdot e^{i\varphi(m-n)} d\varphi dr \\
&= \delta_{mn} \frac{1}{2\pi} a \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{n!}} 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2(1+\frac{a}{2})} \cdot r^{2n+1} dr \\
&= \delta_{mn} a \frac{1}{n!} \underbrace{\int_0^\infty e^{-r^2(1+\frac{a}{2})} \cdot r^{2n+1} dr}_{\text{BRONSTEIN [4] 1.1.3.4.2}} \\
&= \delta_{mn} a \frac{1}{n!} \left[\frac{n!}{2} \left(1 + \frac{a}{2} \right)^{-n-1} \right] \\
&= \delta_{mn} \frac{1}{2} a \left(1 + \frac{a}{2} \right)^{-n-1}.
\end{aligned}$$

Dies ist

$$= \delta_{mn} (1 - e^{-\beta}) e^{-n\beta},$$

wenn

$$a = 2 (e^\beta - 1).$$

(2.28)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung lautet damit

$$\begin{aligned}
 p(x, y) &= \frac{1}{2\pi} a \exp \left\{ -\frac{1}{2} a (x^2 + y^2) \right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} 2 (e^\beta - 1) \exp \left\{ -\frac{1}{2} 2 (e^\beta - 1) (x^2 + y^2) \right\} \\
 &= \frac{1}{\pi} (e^\beta - 1) \exp \left\{ - (e^\beta - 1) (x^2 + y^2) \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Die P-Funktion ist also die Gauß'sche Wahrscheinlichkeitsverteilung auf \mathbb{R}^2 , wie sie in Abbildung 2.1 zu sehen ist. ■

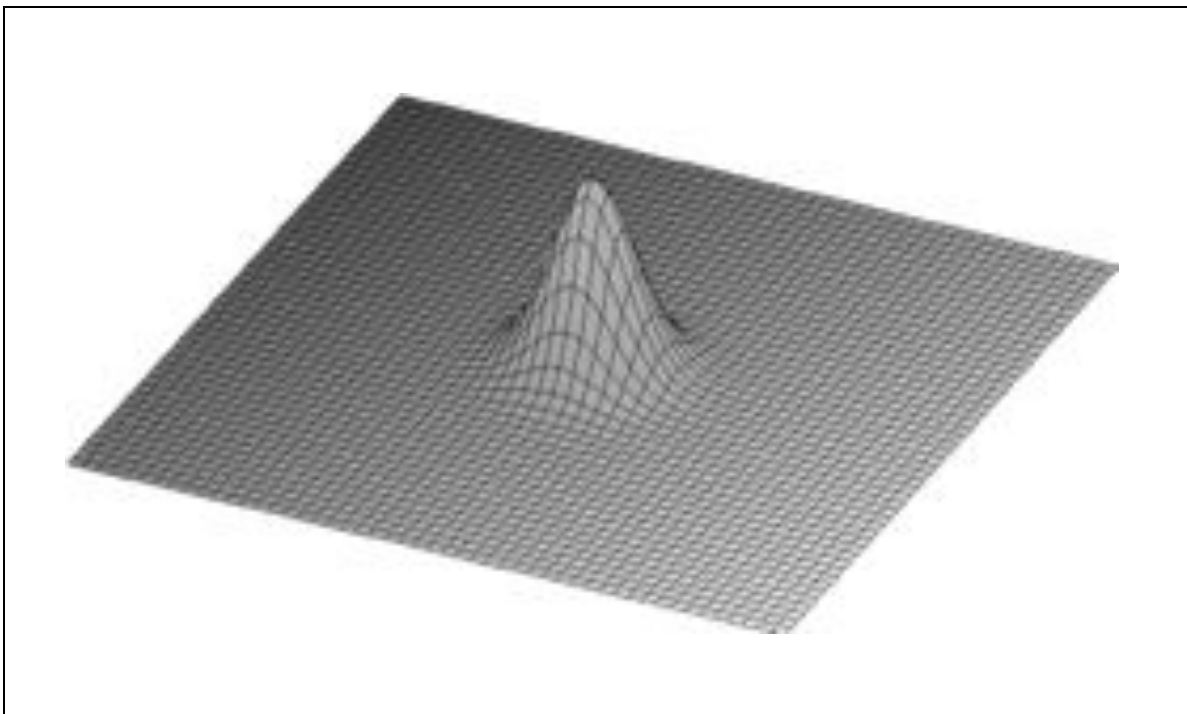


Abbildung 2.1: P-Funktion des Gibbs-Zustandes

2.2.5 Teilchenzahl-Zustand: Der *Teilchenzahl-Zustand* $|n\rangle \langle n| = P_{|n\rangle}$ ist die orthogonale Projektion auf den Eigenzustand $|n\rangle$ des Teilchenzahloperators N zum Eigenwert n :

$$N |n\rangle = n |n\rangle. \tag{2.30}$$

Für den Teilchenzahl-Zustand findet sich in physikalischen Texten regelmäßig auch eine „P-Funktion“, die folgendermaßen angegeben wird:

$$p(\alpha) = \frac{1}{n!} e^{|\alpha|^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right)^n \delta^2(\alpha). \tag{2.31}$$

Allerdings gibt es kein Wahrscheinlichkeitsmaß, zu dem eine solche Verteilungsfunktion gehören würde. Selbst mit gemäßigten Distributionen existiert keine P-Darstellung für Teilchenzahl-Zustände (WALLS UND MILBURN [82]). Dies gilt auch für *gequetschte Zustände* (*squeezed states*). Mit anderen Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilungen, um die es in den nachfolgenden Kapiteln gehen wird, kann man diese Zustände jedoch beschreiben.

2.3 Quantencharakteristische Funktion

Es gibt noch einen weiteren Zugang zur P-Darstellung, den man mittels der sogenannten *quantencharakteristischen Funktion* erhält. Dieser Zugang wird uns sowohl bei der Wigner-Darstellung (siehe Kapitel 3) und der Q-Darstellung (Kapitel 4) als auch bei der verallgemeinerten Darstellung (Kapitel 5) wieder begegnen.

Das größte Problem bei der quantencharakteristischen Funktion ist, daß sie in verschiedenen Büchern auf unterschiedliche aber dennoch ähnliche Art und Weise eingeführt wird. Dies zwingt uns, nur eine Variante zu benutzen, da ein Umrechnen zweier *verschiedener* Zugänge ineinander recht unübersichtlich ist. Wir werden die Formeln verwenden, die sich in den klassischen Texten von WIGNER [83] und CAHILL UND GLAUBER [60], aber auch in der recht übersichtlichen Zusammenfassung von LEE [74] finden.

Für die P-Darstellung verwendet man die *normal geordnete quantencharakteristische Funktion*, die in physikalischen Texten für ein $z \in \mathbb{C}$ folgendermaßen definiert wird:

$$\chi^N(z) := \text{tr} \left\{ e^{zA^*} e^{-\bar{z}A} \varrho \right\}. \quad (2.32)$$

Der Index N steht hierbei für *normal geordnet*.

Da A^* und A unbeschränkte, nicht selbstadjungierte Operatoren sind, machen die Ausdrücke e^{A^*} und e^A eigentlich keinen Sinn. Man kann sie jedoch mit Hilfe der Baker-Hausdorff-Formel in folgenden sinnvollen Ausdruck umwandeln:

$$\begin{aligned} e^{zA^*} e^{-\bar{z}A} &= e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{\frac{1}{2}[zA^*, -\bar{z}A]} \\ &= e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{-\frac{1}{2}|z|^2[A^*, A]} \\ &= e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{-\frac{1}{2}|z|^2(-1)} \\ &= e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{\frac{1}{2}|z|^2} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Nun läßt sich die quantencharakteristische Funktion wie folgt definieren:

2.3.1 Definition: Es seien ϱ ein klassischer Zustand, A^* der Erzeuger, A der Vernichter und Φ der Feldoperator auf $\mathcal{F}_+(\mathbb{C})$. Dann heißt für $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \chi^N(z) &:= \text{tr} \left\{ e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{\frac{1}{2}|z|^2} \varrho \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ e^{i\Phi(-i\sqrt{2}z)} \cdot e^{\frac{1}{2}|z|^2} \varrho \right\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

die *normal geordnete quantencharakteristische Funktion* zum Zustand ρ .

Diese quantencharakteristische Funktion – später werden wir noch weiteren begegnen – ist eine Art Fouriertransformierte des zur P-Darstellung gehörenden Maßes $\mu_p(\alpha)$, bzw. der P-Funktion $p(\alpha)$, falls diese existiert. Eine Art Fouriertransformierte bedeutet, daß in physikalischen Texten eine Transformation durchgeführt wird, die zwar als Fouriertransformation bezeichnet wird, der mathematischen Fouriertransformation jedoch allenfalls ähnelt. Die Transformationen lauten folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \chi^N(z) &= \int_{\mathbb{C}} e^{z\bar{\alpha} - \bar{z}\alpha} d\mu_p(\alpha) \\ \text{bzw.} \quad \chi^N(z) &= \int_{\mathbb{C}} e^{z\bar{\alpha} - \bar{z}\alpha} p(\alpha) d\lambda(\alpha); \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} \mu_p(\alpha) &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \chi^N(z) d\lambda(z) \\ \text{bzw.} \quad p(\alpha) &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \chi^N(z) d\lambda(z). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Näheres zu diesen Transformationen (man nennt sie auch *Fourier-Weyl-Transformationen*) und ihren Zusammenhang mit Fouriertransformationen findet man in WERNER [55].

Beweis: Gleichung (2.35) ergibt sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \chi^N(z) &:= \text{tr} \left\{ e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{\frac{1}{2}|z|^2} \varrho \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{\frac{1}{2}|z|^2} \int_{\mathbb{C}} P_{e(\alpha)} d\mu_p(\alpha) \right\}. \end{aligned}$$

Nach Satz 1.5.3 ist dies

$$= \int_{\mathbb{C}} \text{tr} \left\{ e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{\frac{1}{2}|z|^2} P_{e(\alpha)} \right\} d\mu_p(\alpha).$$

Wir verwenden die Linearität des Erzeugers und die Antilinearität des Vernichters:

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{C}} \text{tr} \left\{ e^{A^*(z) - A(z)} \cdot e^{\frac{1}{2}|z|^2} P_{e(\alpha)} \right\} d\mu_p(\alpha) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \text{tr} \left\{ e^{-i\sqrt{2}\Phi(iz)} \cdot e^{\frac{1}{2}|z|^2} P_{e(\alpha)} \right\} d\mu_p(\alpha) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \text{tr} \left\{ e^{i\Phi(-i\sqrt{2}z)} \cdot e^{\frac{1}{2}|z|^2} P_{e(\alpha)} \right\} d\mu_p(\alpha). \end{aligned}$$

Dies lässt sich als Weyloperator schreiben:

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{C}} \operatorname{tr} \left\{ W \left(-i\sqrt{2}z \right) \cdot e^{\frac{1}{2}|z|^2} P_{e(\alpha)} \right\} d\mu_p(\alpha) \\ &= \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{1}{2}|z|^2} \left\langle W \left(-i\sqrt{2}z \right) e(\alpha), e(\alpha) \right\rangle d\mu_p(\alpha). \end{aligned}$$

Das folgende ist die Wirkung des Weyloperators auf den Glaubervektor:

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{1}{2}|z|^2} \left\langle e^{i/\sqrt{2}\operatorname{Re}(\langle \alpha, -i\sqrt{2}z \rangle)} e(\alpha + z), e(\alpha) \right\rangle d\mu_p(\alpha) \\ &= \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{1}{2}|z|^2} \left\langle e^{i\operatorname{Im}(\langle z, \alpha \rangle)} e(\alpha + z), e(\alpha) \right\rangle d\mu_p(\alpha). \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt zweier Glaubervektoren liefert:

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{1}{2}|z|^2} e^{i\operatorname{Im}(\langle z, \alpha \rangle)} \left\langle e(\alpha + z), e(\alpha) \right\rangle d\mu_p(\alpha) \\ &= \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{1}{2}|z|^2} e^{i\operatorname{Im}(\langle z, \alpha \rangle)} e^{-\frac{1}{2}|(\alpha+z)-\alpha|^2 + i\operatorname{Im}(\langle \alpha+z, \alpha \rangle)} d\mu_p(\alpha) \\ &= \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{1}{2}|z|^2} e^{i\operatorname{Im}(\langle z, \alpha \rangle)} e^{-\frac{1}{2}|z|^2 + i\operatorname{Im}(\langle \alpha+z, \alpha \rangle)} d\mu_p(\alpha) \\ &= \int_{\mathbb{C}} e^{i\operatorname{Im}(\langle z, \alpha \rangle)} e^{i\operatorname{Im}(\langle \alpha, \alpha \rangle) + i\operatorname{Im}(\langle z, \alpha \rangle)} d\mu_p(\alpha) \\ &= \int_{\mathbb{C}} e^{i\operatorname{Im}(\langle z, \alpha \rangle)} e^{i\operatorname{Im}(\langle z, \alpha \rangle)} d\mu_p(\alpha) \\ &= \int_{\mathbb{C}} e^{2i\operatorname{Im}(\langle z, \alpha \rangle)} d\mu_p(\alpha) \\ &= \int_{\mathbb{C}} e^{\langle z, \alpha \rangle - \langle \alpha, z \rangle} d\mu_p(\alpha) \\ &= \int_{\mathbb{C}} e^{z\bar{\alpha} - \bar{z}\alpha} d\mu_p(\alpha). \end{aligned}$$

Gleichung (2.36) folgt nach einer ähnlichen Rechnung. ■

2.3.2 Der Wechsel in den Ort-Impuls-Phasenraum: Aus mathematischer Sicht ist eine *echte* Fouriertransformation der Form

$$f(y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\langle y, x \rangle} f(x) dx \quad (2.37)$$

sinnvoller als obige Transformation, da von ersterer viel mehr Eigenschaften bekannt sind und man sie deshalb viel besser handhaben kann. Man kann auf eine mathemati-

sche Fouriertransformation kommen, indem man die für die Quantenoptik übliche komplexe α -Ebene mit den Operatoren A und A^* verläßt und stattdessen im Ort-Impuls-Phasenraum der Quantenmechanik arbeitet, d. h. in der reellen (x, y) -Ebene mit den Operatoren Q und P . Die beiden Ebenen hängen durch

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \bar{\alpha}); \quad y = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\alpha - \bar{\alpha}); \quad (2.38)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy); \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy) \quad (2.39)$$

und durch

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(A + A^*); \quad P = \frac{1}{i\sqrt{2}}(A - A^*); \quad (2.40)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP); \quad A^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP) \quad (2.41)$$

zusammen. Eine optische Hilfestellung dieser Transformationen bietet Abbildung 2.2.

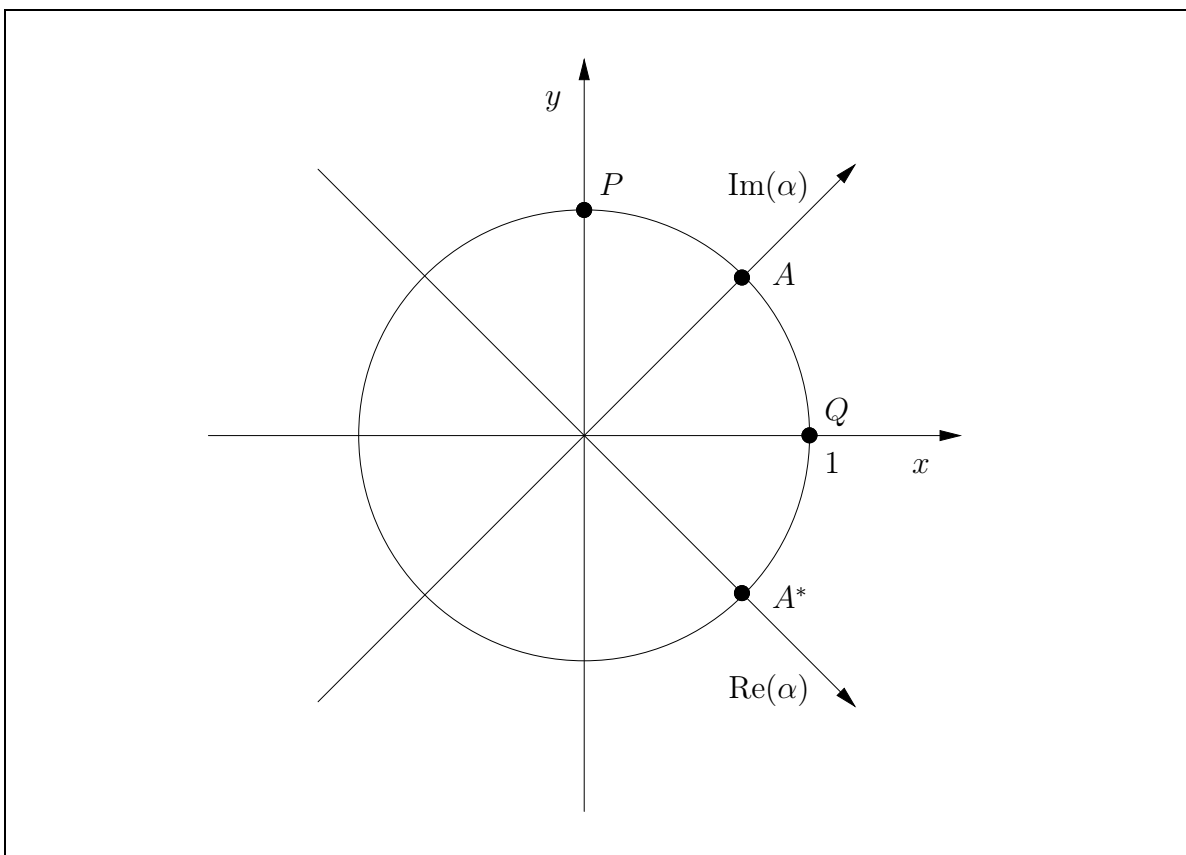


Abbildung 2.2: α -Ebene und Phasenraum – Eine optische Hilfestellung

Die P-Funktion $p(\alpha)$ in der α -Ebene hängt mit der P-Funktion $\tilde{p}(x, y)$ im Phasenraum über die Normierung

$$1 = \int_{\mathbb{C}} p(\alpha) d\lambda(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{p}(x, y) dx dy \quad (2.42)$$

zusammen, wobei $d\lambda(\alpha) = \frac{1}{2} dx dy$. Daraus ergibt sich

$$\tilde{p}(x, y) = \frac{1}{2} p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy)\right); \quad (2.43)$$

$$p(\alpha) = 2\tilde{p}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \bar{\alpha}), \frac{1}{i\sqrt{2}}(\alpha - \bar{\alpha})\right). \quad (2.44)$$

Für die normal geordnete quantencharakteristische Funktion $\tilde{\chi}^N(\xi, \eta)$ auf dem Phasenraum ergibt sich mit Hilfe der Transformationen

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\xi - \eta); \quad \tilde{z} = \frac{-1}{\sqrt{2}}(i\xi + \eta); \quad (2.45)$$

$$\xi = \frac{i}{\sqrt{2}}(\tilde{z} + z); \quad \eta = \frac{-1}{\sqrt{2}}(\tilde{z} + z) \quad (2.46)$$

die Beziehung zu $\chi^N(z)$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}^N(\xi, \eta) &= \chi^N\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(i\xi - \eta)\right) \\ &= \text{tr} \left\{ e^{i\xi Q + i\eta P} \cdot e^{\frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2)} \varrho \right\}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Die Umkehrung lautet

$$\begin{aligned} \chi^N(z) &= \tilde{\chi}^N\left(\frac{i}{\sqrt{2}}(\tilde{z} + z), \frac{-1}{\sqrt{2}}(\tilde{z} + z)\right) \\ &= \text{tr} \left\{ e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{\frac{1}{2}|z|^2} \varrho \right\}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Dies gilt wegen (2.41), (2.45) und auf Grund der Identitäten

$$\begin{aligned} zA^* - \bar{z}A &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i\xi - \eta)A^* - \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\xi - \eta)A \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i\xi - \eta) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP) \right) - \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\xi - \eta) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP) \right) \\ &= \frac{1}{2} [(i\xi - \eta)(Q - iP) + (i\xi + \eta)(Q + iP)] \\ &= \frac{1}{2} [2i\xi Q - 2i\eta P] \\ &= i\xi Q - i\eta P \end{aligned} \quad (2.49)$$

sowie wegen

$$e^{\frac{1}{4}(\xi^2+\eta^2)} = e^{\frac{1}{2}|z|^2}. \quad (2.50)$$

Nun kann man die Beziehung zwischen normal geordneter quantencharakteristischer Funktion und P-Funktion durch eine *echte* Fouriertransformation auf dem Phasenraum formulieren:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \tilde{\chi}^N(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \operatorname{tr} \left\{ e^{i\xi Q + i\eta P} \cdot e^{\frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2)} \varrho \right\} \, d\xi \, d\eta. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Und umgekehrt:

$$\tilde{\chi}^N(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\xi x + \eta y)} \tilde{p}(x, y) \, dx \, dy. \quad (2.52)$$

Eine Übersicht über die beiden Darstellungen (α -Ebene \leftrightarrow (x, y) -Ebene) findet sich in Abbildung 2.3. Beide Darstellung finden sich auch in der physikalischen Literatur, z. B. in LEE [74] und LUISELL [77].

| komplexe α -Ebene | Ort-Impuls-Phasenraum |
|--|---|
| $\alpha \in \mathbb{C}$ | $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ |
| A, A^* | P, Q |
| $\int_{\mathbb{C}} \dots \, d\lambda(\alpha)$ | $\int_{\mathbb{R}^2} \dots \, dx \, dy$ |
| $p(\alpha)$ | $\tilde{p}(x, y)$ |
| $\chi^N(z) = \operatorname{tr} \left\{ e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{\frac{1}{2} z ^2} \varrho \right\}$ | $\tilde{\chi}^N(\xi, \eta) = \operatorname{tr} \left\{ e^{i\xi Q + i\eta P} \cdot e^{\frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2)} \varrho \right\}$ |
| $p(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \chi^N(z) \, d\lambda(z)$ | $\tilde{p}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \tilde{\chi}^N(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta$ |

Abbildung 2.3: Vergleich der α -Ebene mit dem Ort-Impuls-Phasenraum

2.3.3 (Quanten-)Charakteristische Funktion und Momente: Nun kann man auch erklären, weshalb die quantencharakteristische Funktion als *normal geordnet* bezeichnet

wird. In der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie werden charakteristische Funktionen $c(k)$ als Fouriertransformierte von Wahrscheinlichkeitsdichten $d(x)$ definiert:

$$c(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} d(x) dx. \quad (2.53)$$

Aus der charakteristischen Funktion können durch Ableiten die Momente von $d(x)$ gewonnen werden:

$$\left. \frac{d^n}{dk^n} c(k) \right|_{k=0} = (-i)^n \int_{\mathbb{R}} x^n d(x) dx. \quad (2.54)$$

Dasselbe kann man in der Quantenwahrscheinlichkeitstheorie tun: Die normal geordnete quantencharakteristische Funktion $\chi^N(z)$ ist die Fouriertransformierte der Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(\alpha)$. Sie heißt *normal geordnet*, da ihre Ableitung gerade die Erwartungswerte normal geordneter Produkte von Operatoren liefert:

$$\begin{aligned} \text{tr} \{(A^*)^r A^s \varrho\} &= \left. \frac{\partial^{r+s}}{\partial z^r \partial \bar{z}^s} \chi^N(z) \right|_{z=0} \\ &= \left. \frac{\partial^{r+s}}{\partial z^r \partial \bar{z}^s} \text{tr} \left\{ e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{\frac{1}{2}|z|^2} \varrho \right\} \right|_{z=0} \\ &= \int_{\mathbb{C}} \bar{\alpha}^r \alpha^s p(\alpha) d\lambda(\alpha). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Die dabei verwendeten Ableitungen $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sind die sogenannten *Wirtingerableitungen*. Setzt man $z := x + iy$, so gelten die Identitäten

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (2.57)$$

Man kann daher so tun, als ob z und \bar{z} unabhängige Variablen wären und formal nach ihnen ableiten. Eine schöne, übersichtliche Darstellung der Wirtingerableitungen findet sich in MAHLER [78].

Für anders geordnete Produkte gibt es entsprechende quantencharakteristische Funktionen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen, um die es in den folgenden Kapiteln gehen wird.

Kapitel 3

Wigner-Darstellung

In dem 1932 veröffentlichten Artikel „On the quantum correction for thermodynamic equilibrium“ [83] schreibt E. WIGNER folgendes:

„If the wave function $\psi(x_1 \cdots x_n)$ is given one may build the following expression

$$P(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n) = \left(\frac{1}{h\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \cdots dy_n \psi(x_1 + y_1 \cdots x_n + y_n)^* \psi(x_1 - y_1 \cdots x_n - y_n) e^{2i(p_1 y_1 + \cdots + p_n y_n)/h}$$

and call it the probability-function of the simultaneous values of $x_1 \cdots x_n$ for the coordinates and $p_1 \cdots p_n$ for the momenta. [... This expression] was chosen from all possible expressions, because it seems to be the simplest.“

Dies ist das erste Auftreten¹ einer Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilung. Sie wird seitdem als *Wigner-Funktion* bezeichnet. WIGNERS Darstellung der Quantenmechanik hat weithin Anwendung in vielen Bereichen der Physik gefunden, insbesondere dann, wenn Quanten-Korrekturen für klassische Gesetze gesucht wurden – wie auch in WIGNERS Artikel selbst.

Nach der P-Darstellung wollen wir im folgenden auch die Wigner-Darstellung in eine mathematischere Sprache übersetzen.

¹Eine Fußnote in diesem Artikel besagt jedoch: „This expression was found by L. SZILLARD and the present author [E. WIGNER] some years ago for another purpose.“

3.1 Definition und Eigenschaften

3.1.1 Definition: Es seien ρ ein klassischer Zustand, A^* der Erzeuger und A der Vernichter auf $\mathcal{F}_+(\mathbb{C})$. Dann heißt für $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\chi^S(z) &:= \operatorname{tr} \left\{ e^{zA^* - \bar{z}A} \rho \right\} \\ &= \operatorname{tr} \left\{ e^{i\Phi(-i\sqrt{2}z)} \rho \right\}\end{aligned}\tag{3.1}$$

die *symmetrisch geordnete quantencharakteristische Funktion* zum Zustand ρ . Für ein $\alpha \in \mathbb{C}$ heißt die Funktion

$$\begin{aligned}w(\alpha) &:= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \chi^S(z) \, d\lambda(z) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \operatorname{tr} \left\{ e^{zA^* - \bar{z}A} \rho \right\} \, d\lambda(z) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \operatorname{tr} \left\{ e^{i\Phi(-i\sqrt{2}z)} \rho \right\} \, d\lambda(z)\end{aligned}\tag{3.2}$$

die *Wigner-Funktion* zum Zustand ρ .

Umgekehrt läßt sich die symmetrisch geordnete quantencharakteristische Funktion aus der Wigner-Funktion berechnen:

$$\chi^S(z) = \int_{\mathbb{C}} e^{z\bar{\alpha} - \bar{z}\alpha} w(\alpha) \, d\lambda(\alpha).\tag{3.3}$$

3.1.2 Der Wechsel in den Ort-Impuls-Phasenraum: Wie bei der P-Funktion gilt auch bei der Wigner-Funktion, daß es aus mathematischer Sicht sinnvoller ist, eine *echte* Fouriertransformation durchzuführen. Mit denselben Transformationen wie in Abschnitt 2.3.2 wechseln wir nun von der komplexen α -Ebene in die reelle (x, y) -Ebene. Die Transformationen lauten wieder

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \bar{\alpha}); \quad y = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\alpha - \bar{\alpha});\tag{3.4}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy); \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy);\tag{3.5}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(A + A^*); \quad P = \frac{1}{i\sqrt{2}}(A - A^*); \quad (3.6)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP); \quad A^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP); \quad (3.7)$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\xi - \eta); \quad \tilde{z} = \frac{-1}{\sqrt{2}}(i\xi + \eta); \quad (3.8)$$

$$\xi = \frac{i}{\sqrt{2}}(\tilde{z} + z); \quad \eta = \frac{-1}{\sqrt{2}}(\tilde{z} + z). \quad (3.9)$$

Die Wigner-Funktion $w(\alpha)$ in der α -Ebene hängt mit der Wigner-Funktion $\tilde{w}(x, y)$ im Phasenraum wie folgt zusammen:

$$\tilde{w}(x, y) = \frac{1}{2} w \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) \right); \quad (3.10)$$

$$w(\alpha) = 2 \tilde{w} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \bar{\alpha}), \frac{1}{i\sqrt{2}}(\alpha - \bar{\alpha}) \right). \quad (3.11)$$

Für die symmetrisch geordnete quantencharakteristische Funktion $\tilde{\chi}^S(\xi, \eta)$ auf dem Phasenraum ergibt sich die Beziehung zu $\chi^S(z)$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}^S(\xi, \eta) &= \chi^S \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(i\xi - \eta) \right) \\ &= \text{tr} \{ e^{i\xi Q + i\eta P} \varrho \}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die Rücktransformation lautet

$$\begin{aligned} \chi^S(z) &= \tilde{\chi}^S \left(\frac{i}{\sqrt{2}}(\tilde{z} + z), \frac{-1}{\sqrt{2}}(\tilde{z} + z) \right) \\ &= \text{tr} \{ e^{zA^* - \bar{z}A} \varrho \}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Nun kann man die Beziehung zwischen symmetrisch geordneter quantencharakteristischer Funktion und Wigner-Funktion durch eine *echte* Fouriertransformation auf dem Phasenraum formulieren:

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \tilde{\chi}^A(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \text{tr} \{ e^{i\xi Q + i\eta P} \varrho \} \, d\xi \, d\eta; \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\tilde{\chi}^S(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\xi x + \eta y)} \tilde{w}(x, y) \, dq \, dp. \quad (3.15)$$

3.1.3 (Quanten-)Charakteristische Funktion und Momente: Die symmetrisch geordnete quantencharakteristische Funktion $\chi^S(z)$ ist die Fouriertransformierte der Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(\alpha)$. Sie heißt *symmetrisch geordnet*, da ihre Ableitung gerade die Erwartungswerte symmetrisch geordneter Produkte von Operatoren liefert.

$$\begin{aligned} \text{tr} \{ \{A^r (A^*)^s\}_{\text{sym}} \varrho \} &= \frac{\partial^{r+s}}{\partial z^r \partial \bar{z}^s} \chi^S(z) \Big|_{z=0} \\ &= \frac{\partial^{r+s}}{\partial z^r \partial \bar{z}^s} \text{tr} \{ e^{zA^* - \bar{z}A} \varrho \} \Big|_{z=0} \\ &= \int_{\mathbb{C}} \alpha^r \bar{\alpha}^s w(\alpha) d\lambda(\alpha). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dabei bedeutet $\{A^r (A^*)^s\}_{\text{sym}}$ den Durchschnitt aller Möglichkeiten, die $r+s$ Operatoren anzuordnen. So gilt z. B. für $r=2, s=2$:

$$\begin{aligned} \{A^2 (A^*)^2\}_{\text{sym}} &= \frac{1}{6} (A^2 (A^*)^2 + AA^* AA^* + A(A^*)^2 A \\ &\quad + A^* A^2 A^* + A^* AA^* A + (A^*)^2 A^2). \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.1.4 Zusammenhang zwischen Wigner- und P-Funktion: Die Wigner-Funktion ist eine mit einer Gaußfunktion ausgeschmierte P-Funktion. Im Phasenraum bedeutet dies

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x, y) &= \tilde{p}(x, y) * \frac{1}{\pi} e^{-(x^2+y^2)} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-((x-x')^2+(y-y')^2)} \tilde{p}(x', y') dx' dy'. \end{aligned} \quad (3.18)$$

In der α -Ebene lautet der Zusammenhang

$$\begin{aligned} w(\alpha) &= p(\alpha) * \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{-2|\alpha-\alpha'|^2} p(\alpha') d\lambda(\alpha'). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Beweis: Vergleicht man

$$\tilde{\chi}^S(\xi, \eta) := \text{tr} \{ e^{i\xi Q + i\eta P} \varrho \} \quad (3.20)$$

mit

$$\tilde{\chi}^N(\xi, \eta) := \text{tr} \left\{ e^{i\xi Q + i\eta P} \cdot e^{\frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2)} \varrho \right\}, \quad (3.21)$$

so ergibt sich

$$\tilde{\chi}^S(\xi, \eta) = \tilde{\chi}^N(\xi, \eta) \cdot e^{-\frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2)}. \quad (3.22)$$

Eine Fouriertransformation führt zu

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \tilde{\chi}^S(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \tilde{\chi}^S(\xi, \eta) \cdot e^{-\frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2)} \, d\xi \, d\eta. \quad (3.23)$$

Die Fouriertransformation des Produktes wird zur Faltung:

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \tilde{\chi}^S(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \quad (3.24)$$

$$* \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} e^{-\frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2)} \, d\xi \, d\eta. \quad (3.25)$$

Also gilt:

$$\tilde{w}(x, y) = \tilde{p}(x, y) * \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} e^{-\frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2)} \, d\xi \, d\eta \quad (3.26)$$

$$\tilde{w}(x, y) = \tilde{p}(x, y) * \frac{1}{\pi} e^{-(x^2 + y^2)}. \quad (3.27)$$

Dies ist der Zusammenhang im Phasenraum. Transformiert man (3.27) vom Phasenraum in die α -Ebene, so erhält man

$$\begin{aligned} w(\alpha) &= 2 \tilde{w} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \bar{\alpha}), \frac{1}{i\sqrt{2}}(\alpha - \bar{\alpha}) \right) \\ &= 2 \left(\tilde{p} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \bar{\alpha}), \frac{1}{i\sqrt{2}}(\alpha - \bar{\alpha}) \right) * \frac{1}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} \right) \\ &= 2 \left(p(\alpha) * \frac{1}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} \right) \\ &= p(\alpha) * \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Also wird die P-Funktion in beiden Darstellungen mit einer Gauß-Funktion gefaltet, um die Wigner-Funktion zu erhalten. ■

3.1.5 Normiertheit der Wigner-Funktion: Die Wigner-Funktion ist normiert, d. h.,

$$\int_{\mathbb{C}} w(\alpha) \, d\lambda(\alpha) = 1. \quad (3.29)$$

Beweis: Wir verwenden den Zusammenhang zwischen Wigner- und P-Funktion mittels Faltung:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} w(\alpha) \, d\lambda(\alpha) &= \int_{\mathbb{C}} p(\alpha) * \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} \, d\lambda(\alpha) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} p(\alpha - \alpha') \cdot \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha'|^2} \, d\lambda(\alpha') \, d\lambda(\alpha) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} p(\alpha - \alpha') \cdot \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha'|^2} \, d\lambda(\alpha) \, d\lambda(\alpha') \\ &= \int_{\mathbb{C}} \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha'|^2} \underbrace{\int_{\mathbb{C}} p(\alpha - \alpha') \, d\lambda(\alpha)}_{=1} \, d\lambda(\alpha'). \\ &= \int_{\mathbb{C}} \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha'|^2} \, d\lambda(\alpha') \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.30)$$

■

3.2 Beispiele

3.2.1 Reiner Zustand: Für einen reinen Zustand der Form $P_{e(\beta)}$ lautet die Wigner-Funktion

$$w(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha - \beta|^2}. \quad (3.31)$$

Dies gilt nach der Definition der Wigner-Funktion aus Gleichung (3.2) wegen folgender Identitäten:

$$\begin{aligned} w(\alpha) &:= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \chi^S(z) \, d\lambda(z) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \operatorname{tr} \{ e^{zA^* - \bar{z}A} P_{e(\beta)} \} \, d\lambda(z) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \operatorname{tr} \left\{ W(-i\sqrt{2}z) P_{e(\beta)} \right\} \, d\lambda(z) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \left\langle W(-i\sqrt{2}z) e(\beta), e(\beta) \right\rangle \, d\lambda(z). \end{aligned}$$

Mit der Wirkung der Weyloperatoren auf Glaubervektoren und dem Skalarprodukt zwischen Glaubervektoren ergibt sich

$$\begin{aligned} w(\alpha) &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^{z\bar{\beta} - \bar{z}\beta} d\lambda(z) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}(\alpha - \beta) - z(\bar{\alpha} - \bar{\beta})} e^{-\frac{1}{2}|z|^2} d\lambda(z) \\ &= \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha - \beta|^2}. \end{aligned}$$

Wir können diesen Beweis auch eleganter führen, indem wir die Beziehung zwischen Wigner- und P-Darstellung einsetzen. Wir falten die P-Darstellung des reinen Zustandes $P_{e(\beta)}$ (siehe Beispiel 2.2.1) mit einer Gaußglocke:

$$\begin{aligned} w(\alpha) &= \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{-2|\alpha - \alpha'|^2} d\mu_p(\alpha') \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{-2|\alpha - \alpha'|^2} d\beta(\alpha') \\ &= \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha - \beta|^2}. \end{aligned}$$

Die Wigner-Funktion eines reinen Zustandes ist also eine zweidimensionale Gauß-Funktion, die um den Punkt β mit Varianz $1/2$ konzentriert ist.

3.2.2 Gibbs-Zustand: Um die Wigner-Funktion zum Gibbs-Zustand

$$\varrho(\beta) = (1 - e^{-\beta}) \begin{pmatrix} e^{-\beta} & & & & \\ & e^{-2\beta} & & & \\ & & e^{-3\beta} & & \\ & & & e^{-4\beta} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

zu berechnen, können wir auf die schon berechnete P-Funktion

$$\tilde{p}(x, y) = \frac{1}{\pi} (e^\beta - 1) \exp \{ - (e^\beta - 1) (x^2 + y^2) \} \quad (3.33)$$

zurückgreifen. Wir verwenden die Beziehung zwischen Wigner- und P-Funktion aus Gleichung (3.18):

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x, y) &= \tilde{p}(x, y) * \frac{1}{\pi} e^{-(x^2 + y^2)} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-((x-x')^2 + (y-y')^2)} \tilde{p}(x', y') dx' dy'. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \tilde{w}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-((x-x')^2+(y-y')^2)} \frac{1}{\pi} (e^\beta - 1) e^{-(e^\beta-1)(x'^2+y'^2)} dx' dy'. \\
 &= \frac{1}{\pi^2} (e^\beta - 1) \int_{\mathbb{R}^2} e^{-((x-x')^2+(y-y')^2)} e^{-(e^\beta-1)(x'^2+y'^2)} dx' dy'. \quad (3.35) \\
 &= \frac{1}{\pi} \tanh(\beta/2) e^{-\tanh(\beta/2)(x^2+y^2)}.
 \end{aligned}$$

Die Wigner-Funktion des Gibbs-Zustandes, wie sie in Abbildung 3.1 zu sehen ist, hat also die gleiche Gestalt wie die entsprechende P-Funktion. Die Wigner-Gauß-Glocke ist jedoch breiter als die P-Gauß-Glocke.

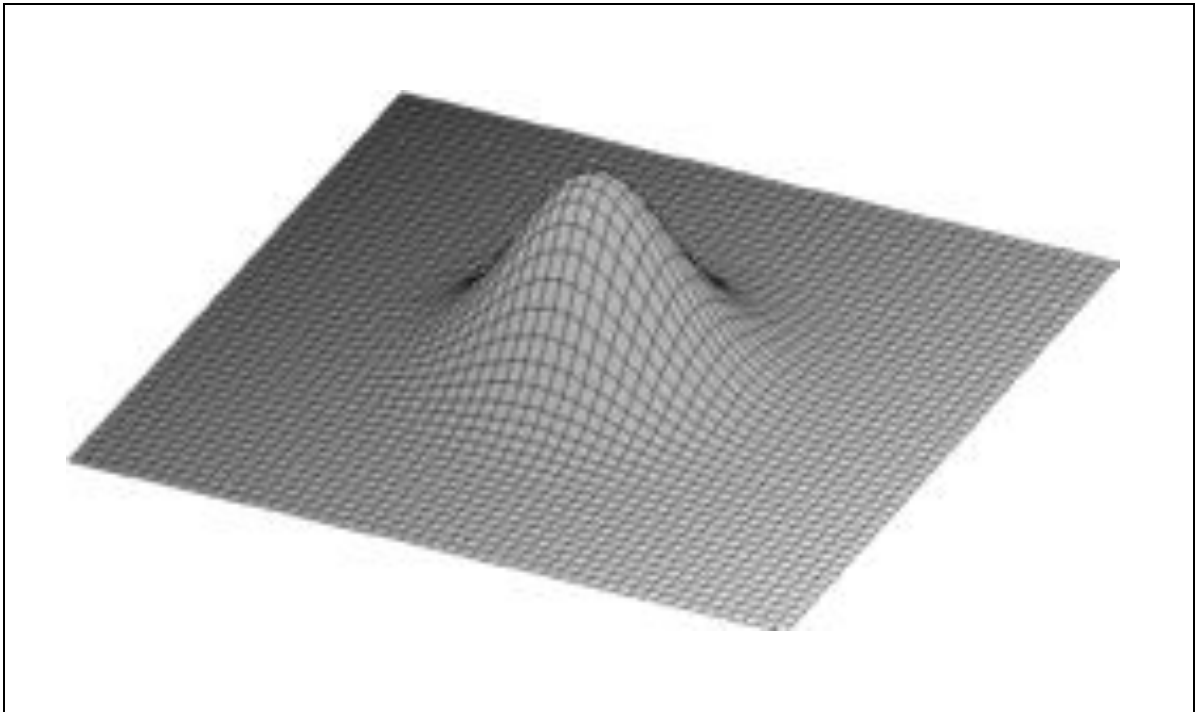


Abbildung 3.1: Wigner-Funktion des Gibbs-Zustandes

3.2.3 Teilchenzahl-Zustand: Die Wigner-Funktion zum n -ten Teilchenzahl-Zustand $|n\rangle \langle n|$ lautet (WALLS UND MILBURN [82]):

$$w(x, y) = \frac{2}{\pi} (-1)^n L_n(4(x^2 + y^2)) e^{-2(x^2+y^2)}. \quad (3.36)$$

Dabei ist $L_n(x)$ das n -te Laguerre-Polynom. Die Wigner-Funktion des Teilchenzahl-Zustandes $|4\rangle \langle 4|$ ist in Abbildung 3.2 zu sehen. Gut zu erkennen ist, daß die Wigner-Funktion auch negative Werte annimmt. Wie man eine „Wahrscheinlichkeitsverteilung“

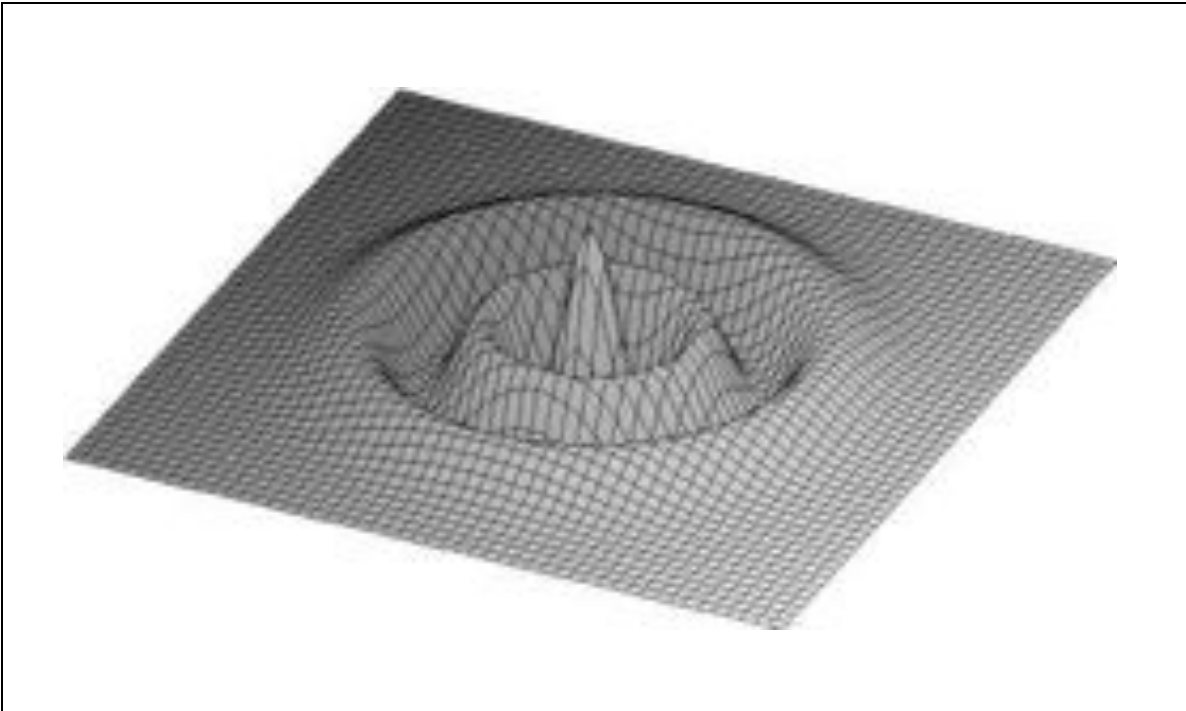


Abbildung 3.2: Wigner-Funktion des Teilchenzahl-Zustandes $|4\rangle \langle 4|$

mit negativen Werten interpretieren kann, ist in FEYNMAN [39] sehr interessant und anschaulich beschrieben.

3.2.4 Gequetschter Zustand (squeezed state): Die Wigner-Funktion eines gequetschten Zustandes (squeezed state) (vgl. LEE [74]) mit Parameter κ lautet (WALLS UND MILBURN [82]):

$$w(x, y) = \frac{2}{\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} (x^2 e^{-2\kappa} + y^2 e^{2\kappa})\right) \quad (3.37)$$

Die Wigner-Funktion eines gequetschten Zustandes zum Parameter $\kappa = 1$ ist in Abbildung 3.3 zu sehen.

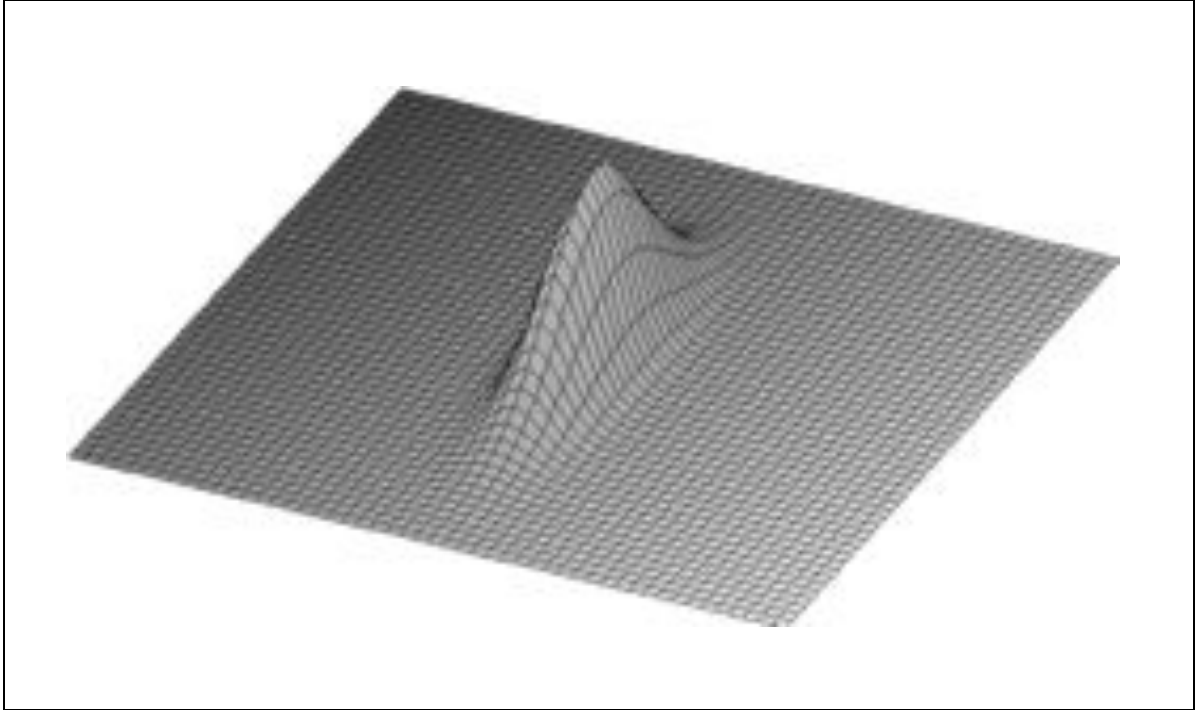


Abbildung 3.3: Wigner-Funktion eines gequetschten Zustandes ($\kappa = 1$)

3.3 Wigners ursprüngliche Formulierung

Die ursprüngliche Formulierung der Wigner-Funktion, wie sie in dem einleitenden Zitat dieses Kapitels zu finden ist, kann man folgendermaßen erhalten:

$$\tilde{w}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \operatorname{tr} \{ e^{i\xi Q + i\eta P} \varrho \} d\xi d\eta \quad (3.38)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \operatorname{tr} \{ e^{i\eta P} e^{i\xi Q} e^{i\xi\eta/2} \varrho \} d\xi d\eta \quad (3.39)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} e^{-i\xi\eta/2} \operatorname{tr} \{ e^{i\eta/2P} e^{i\xi Q} \varrho e^{i\eta/2P} \} d\xi d\eta. \quad (3.40)$$

Man schreibt die Spur in Ortsdarstellung,

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} e^{-i\xi\eta/2} \int_{\mathbb{R}} \langle e^{i\eta/2P} e^{i\xi Q} \varrho e^{i\eta/2P} x', x' \rangle dx' d\xi d\eta, \quad (3.41)$$

und verwendet die Wirkungsweise der Operatoren:

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\xi(x-x')} e^{-i\eta y} \langle \varrho(x' - \eta/2), (x' + \eta/2) \rangle dx' d\xi d\eta. \quad (3.42)$$

Führt man die Integrationen aus und setzt $\lambda = \eta/2$, so erhält man die Wigner-Funktion in ihrer ursprünglichen Notation:

$$\tilde{w}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\lambda y} \langle \varrho(x - \lambda), (x + \lambda) \rangle d\lambda. \quad (3.43)$$

WIGNER verwendete die Dirac-Notation und benutzte andere Variablen aber die Gestalt ist dieselbe:

$$w(x, p) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2ipy} \langle x - y | \varrho | x + y \rangle dy. \quad (3.44)$$

Wird in physikalischen Texten die Wigner-Funktion angegeben, so geschieht dies stets in der Form von Gleichung (3.44).

Kapitel 4

Q-Darstellung

In dem für die Theorie der Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilungen grundlegenden Artikel „Density operators and quasiprobability distributions“ [60] von K. E. CAHILL und R. J. GLAUBER wird die Funktion $\langle \alpha | \varrho | \alpha \rangle$, die heute als Q-Funktion bezeichnet wird, folgendermaßen beschrieben:

„The function $\langle \alpha | \varrho | \alpha \rangle$, which is infinitely differentiable, corresponds to the normally ordered form of the density operator. Its use as a weight function in an integral expansion of the density operator is shown to involve singularities that are closely related to those which occur in the P representation.“

Bei der Q-Darstellung wird versucht, eine Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilung zu entwickeln, indem man die Diagonalelemente des Dichteoperators verwendet. Die Q-Darstellung ist die dritte wichtige Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilung, die wir mathematisch formulieren wollen.

4.1 Definition und Eigenschaften

4.1.1 Definition: Es seien ϱ ein klassischer Zustand und $e(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ die Glaubervektoren auf $\mathcal{F}_+(\mathbb{C})$. Dann heißt die Abbildung $q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$q(\alpha) := \frac{1}{\pi} \langle \varrho e(\alpha), e(\alpha) \rangle \quad (4.1)$$

die *Q-Funktion* zum Zustand ϱ .

4.1.2 Eigenschaften: Wegen

$$\begin{aligned} 1 &= \text{tr} \{ \varrho \} = \text{tr} \{ \mathbb{1} \varrho \} = \text{tr} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} P_{e(\alpha)} d\lambda(\alpha) \varrho \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \text{tr} \{ P_{e(\alpha)} \varrho \} d\lambda(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \langle \varrho e(\alpha), e(\alpha) \rangle d\lambda(\alpha) \end{aligned} \quad (4.2)$$

ist die Q-Funktion normiert, d. h.,

$$\int_{\mathbb{C}} q(\alpha) d\lambda(\alpha) = 1. \quad (4.3)$$

Die Q-Funktion ist, im Gegensatz zu P- und Wigner-Funktion, stets positiv:

$$q(\alpha) \geq 0. \quad (4.4)$$

Die Q-Funktion ist also von den bisher betrachteten Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilungen diejenige, die in ihren Eigenschaften einer klassischen Wahrscheinlichkeitsverteilung am nächsten kommt.

4.2 Beispiele

4.2.1 Reiner Zustand: Die Q-Funktion eines reinen Zustandes der Form $P_{e(\beta)}$ lautet

$$\begin{aligned} q(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \langle P_{e(\beta)} e(\alpha), e(\alpha) \rangle \\ &= \frac{1}{\pi} \langle \langle e(\alpha), e(\beta) \rangle e(\beta), e(\alpha) \rangle \\ &= \frac{1}{\pi} |\langle e(\alpha), e(\beta) \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha-\beta|^2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die Q-Funktion eines reinen Zustandes ist also eine Gaußglocke, die um den Punkt β mit Varianz 1 konzentriert ist. Sie ist demnach doppelt so „breit“ wie die Wigner-Funktion zum selben Zustand (siehe Beispiel 3.2.1).

Dies läßt vermuten, daß die Q-Funktion eine geglättete Wigner-Funktion ist, genauso, wie die Wigner-Funktion eine geglättete P-Funktion ist. Daß dies tatsächlich so ist, zeigt die Behandlung der Q-Funktion mittels der quantencharakteristischen Funktion, die uns überdies in Kapitel 5 eine verallgemeinerte Darstellung ermöglicht.

4.3 Quantencharakteristische Funktion

Für die Q-Darstellung verwendet man die *antinormal geordnete quantencharakteristische Funktion*, die in physikalischen Texten folgendermaßen aussieht:

$$\chi^A(z) := \text{tr} \left\{ e^{-\bar{z}A} e^{zA^*} \varrho \right\}. \quad (4.6)$$

Der Index A steht hierbei für *antinormal geordnet*.

Diese Funktion muß man, wie schon zuvor die *normal geordnete quantencharakteristische Funktion*, mittels der Baker-Hausdorff-Formel in folgenden sinnvollen Ausdruck umwandeln:

$$\begin{aligned} e^{zA^*} e^{-\bar{z}A} &= e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{-\frac{1}{2}[zA^*, -\bar{z}A]} \\ &= e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{\frac{1}{2}|z|^2[A^*, A]} \\ &= e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{\frac{1}{2}|z|^2(-\mathbb{1})} \\ &= e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{-\frac{1}{2}|z|^2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Nun können wir die Q-Funktion über die quantencharakteristische Funktion definieren:

4.3.1 Definition: Es seien ϱ ein klassischer Zustand, A^* der Erzeuger und A der Vernichter auf $\mathcal{F}_+(\mathbb{C})$. Dann heißt für $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \chi^A(z) &:= \text{tr} \left\{ e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \varrho \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ e^{i\Phi(-i\sqrt{2}z)} \cdot e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \varrho \right\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

die *antinormal geordnete quantencharakteristische Funktion* zum Zustand ϱ . Die Funktion

$$\begin{aligned} q(\alpha) &:= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \chi^A(z) \, d\lambda(z) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \text{tr} \left\{ e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \varrho \right\} \, d\lambda(z) \end{aligned} \quad (4.9)$$

heißt *Q-Funktion* zum Zustand ϱ .

Umgekehrt läßt sich die antinormal geordnete quantencharakteristische Funktion aus der Q-Funktion berechnen:

$$\chi^A(z) = \int_{\mathbb{C}} e^{z\bar{\alpha} - \bar{z}\alpha} q(\alpha) \, d\lambda(\alpha). \quad (4.10)$$

4.3.2 Äquivalenz der beiden Definitionen: Die beiden Darstellungen der Q-Funktion aus Definition 4.3.1,

$$q(\alpha) := \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \operatorname{tr} \left\{ e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \varrho \right\} d\lambda(z), \quad (4.11)$$

und aus Definition 4.1.1,

$$q(\alpha) := \frac{1}{\pi} \langle \varrho e(\alpha), e(\alpha) \rangle, \quad (4.12)$$

sind äquivalent.

Beweis: Sei $\varrho := \int_{\mathbb{C}} P_{e(\beta)} d\mu_p(\beta)$ ein allgemeiner klassischer Zustand. Dann gilt für die Definition 4.3.1 der Q-Funktion:

$$q(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \operatorname{tr} \left\{ e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \int_{\mathbb{C}} P_{e(\beta)} d\mu_p(\beta) \right\} d\lambda(z).$$

Nach Satz 1.5.3 ist dies

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \int_{\mathbb{C}} \operatorname{tr} \left\{ e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{-\frac{1}{2}|z|^2} P_{e(\beta)} \right\} d\mu_p(\beta) d\lambda(z) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \cdot e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \int_{\mathbb{C}} \operatorname{tr} \left\{ e^{zA^* - \bar{z}A} P_{e(\beta)} \right\} d\mu_p(\beta) d\lambda(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \cdot e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \operatorname{tr} \left\{ e^{zA^* - \bar{z}A} P_{e(\beta)} \right\} d\lambda(z) d\mu_p(\beta). \end{aligned}$$

Dies läßt sich mit einem Weyloperator schreiben als:

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \cdot e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \operatorname{tr} \left\{ W(-i\sqrt{2}z) P_{e(\beta)} \right\} d\lambda(z) d\mu_p(\beta) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \cdot e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \langle W(-i\sqrt{2}z) e(\beta), e(\beta) \rangle d\lambda(z) d\mu_p(\beta). \end{aligned}$$

Der Weyloperator wirkt auf den Glaubervektor wie folgt:

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \cdot e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \langle e^{i/\sqrt{2}\operatorname{Re}(\langle \beta, -i\sqrt{2}z \rangle)} e(\beta + z), e(\beta) \rangle d\lambda(z) d\mu_p(\beta) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \cdot e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \langle e^{i\operatorname{Im}(\langle z, \beta \rangle)} e(\beta + z), e(\beta) \rangle d\lambda(z) d\mu_p(\beta) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \cdot e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \cdot e^{i\operatorname{Im}(\langle z, \beta \rangle)} \langle e(\beta + z), e(\beta) \rangle d\lambda(z) d\mu_p(\beta). \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt zweier Glaubervektoren liefert:

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \cdot e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \cdot e^{i\text{Im}(\langle z, \beta \rangle)} \cdot e^{-\frac{1}{2}|(\beta+z) - \beta|^2 + i\text{Im}(\langle \beta+z, \beta \rangle)} d\lambda(z) d\mu_p(\beta) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \cdot e^{-|z|^2} \cdot e^{i\text{Im}(\langle z, \beta \rangle)} \cdot e^{-\frac{1}{2}|z|^2 + i\text{Im}(\langle \beta+z, \beta \rangle)} d\lambda(z) d\mu_p(\beta) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \cdot e^{-|z|^2} \cdot e^{i\text{Im}(\langle z, \beta \rangle)} \cdot e^{i\text{Im}(\langle \beta, \beta \rangle) + i\text{Im}(\langle z, \beta \rangle)} d\lambda(z) d\mu_p(\beta) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \cdot e^{-|z|^2} \cdot e^{i\text{Im}(\langle z, \beta \rangle)} \cdot e^{i\text{Im}(\langle z, \beta \rangle)} d\lambda(z) d\mu_p(\beta) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \cdot e^{-|z|^2} \cdot e^{2i\text{Im}(\langle z, \beta \rangle)} d\lambda(z) d\mu_p(\beta) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \cdot e^{-|z|^2} \cdot e^{\langle z, \beta \rangle - \langle \beta, z \rangle} d\lambda(z) d\mu_p(\beta) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \cdot e^{-|z|^2} \cdot e^{z\bar{\beta} - \bar{z}\beta} d\lambda(z) d\mu_p(\beta) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{-|z|^2} \cdot e^{\bar{z}(\alpha - \beta) - z(\bar{\alpha} - \bar{\beta})} d\lambda(z) d\mu_p(\beta) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha - \beta|^2} d\mu_p(\beta).
\end{aligned}$$

Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man die Definition 4.1.1 der Q-Funktion verwendet:

$$\begin{aligned}
q(\alpha) &:= \frac{1}{\pi} \langle \varrho e(\alpha), e(\alpha) \rangle \\
&= \frac{1}{\pi} \left\langle \int_{\mathbb{C}} P_{e(\beta)} d\mu_p(\beta) e(\alpha), e(\alpha) \right\rangle \\
&= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi} \langle P_{e(\beta)} e(\alpha), e(\alpha) \rangle d\mu_p(\beta).
\end{aligned}$$

Der Integrand ist die Q-Funktion des reinen Zustandes $P_{e(\beta)}$ aus Beispiel 4.2.1:

$$= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha - \beta|^2} d\mu_p(\beta).$$

Also sind die beiden Definitionen äquivalent. ■

4.3.3 Der Wechsel in den Ort-Impuls-Phasenraum: Wie bei der Wigner- und der P-Funktion gilt auch bei der Q-Funktion, daß es aus mathematischer Sicht sinnvoller ist, eine *echte* Fouriertransformation durchzuführen. Mit denselben Transformationen wie in Abschnitt 2.3.2 wechseln wir nun von der komplexen α -Ebene in die reelle (x, y) -Ebene.

Die Transformationen lauten

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \bar{\alpha}); \quad y = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\alpha - \bar{\alpha}); \quad (4.13)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy); \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy); \quad (4.14)$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(A + A^*); \quad P = \frac{1}{i\sqrt{2}}(A - A^*); \quad (4.15)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP); \quad A^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP); \quad (4.16)$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\xi - \eta); \quad \tilde{z} = \frac{-1}{\sqrt{2}}(i\xi + \eta); \quad (4.17)$$

$$\xi = \frac{i}{\sqrt{2}}(\tilde{z} + z); \quad \eta = \frac{-1}{\sqrt{2}}(\tilde{z} + z). \quad (4.18)$$

Die Q-Funktion $q(\alpha)$ in der α -Ebene hängt mit der Q-Funktion $\tilde{q}(x, y)$ im Phasenraum wie folgt zusammen:

$$\tilde{q}(x, y) = \frac{1}{2} q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy)\right); \quad (4.19)$$

$$q(\alpha) = 2\tilde{q}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \bar{\alpha}), \frac{1}{i\sqrt{2}}(\alpha - \bar{\alpha})\right). \quad (4.20)$$

Für die antinormal geordnete quantencharakteristische Funktion $\tilde{\chi}^A(\xi, \eta)$ auf dem Phasenraum ergibt sich die Beziehung zu $\chi^A(z)$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}^A(\xi, \eta) &= \chi^A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(i\xi - \eta)\right) \\ &= \text{tr} \left\{ e^{i\xi Q + i\eta P} \cdot e^{-\frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2)} \varrho \right\}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Die Rücktransformation lautet

$$\begin{aligned} \chi^A(z) &= \tilde{\chi}^A\left(\frac{i}{\sqrt{2}}(\tilde{z} + z), \frac{-1}{\sqrt{2}}(\tilde{z} + z)\right) \\ &= \text{tr} \left\{ e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \varrho \right\}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Nun kann man die Beziehung zwischen symmetrisch geordneter quantencharakteristischer Funktion und Q-Funktion durch eine *echte* Fouriertransformation auf dem Pha-

senraum formulieren:

$$\begin{aligned}\tilde{q}(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \tilde{\chi}^A(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \operatorname{tr} \left\{ e^{i\xi Q + i\eta P} \cdot e^{-\frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2)} \varrho \right\} \, d\xi \, d\eta;\end{aligned}\tag{4.23}$$

$$\tilde{\chi}^A(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\xi q + \eta p)} \tilde{q}(x, y) \, dx \, dy.\tag{4.24}$$

4.3.4 (Quanten-)Charakteristische Funktion und Momente: Die antinormal geordnete quantencharakteristische Funktion $\chi^A(z)$ ist die Fouriertransformierte der Wahrscheinlichkeitsverteilung $q(\alpha)$. Sie heißt *antinormal geordnet*, da ihre Ableitung gerade die Erwartungswerte antinormal geordneter Produkte von Operatoren liefert.

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} \{ A^r (A^*)^s \varrho \} &= \frac{\partial^{r+s}}{\partial z^r \partial \bar{z}^s} \chi^A(z) \Big|_{z=0} \\ &= \frac{\partial^{r+s}}{\partial z^r \partial \bar{z}^s} \operatorname{tr} \left\{ e^{z A^* - \bar{z} A} \cdot e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \varrho \right\} \Big|_{z=0} \\ &= \int_{\mathbb{C}} \alpha^r \bar{\alpha}^s q(\alpha) \, d\lambda(\alpha).\end{aligned}\tag{4.25}$$

4.3.5 Zusammenhang zwischen Q- und Wigner-Funktion: Die Q-Funktion ist eine mit einer Gaußfunktion ausgeschmierte Wigner-Funktion. Im Phasenraum bedeutet dies

$$\begin{aligned}\tilde{q}(x, y) &= \tilde{w}(x, y) * \frac{1}{\pi} e^{-(x^2 + y^2)} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-((x-x')^2 + (y-y')^2)} \tilde{w}(x', y') \, dx' \, dy'.\end{aligned}\tag{4.26}$$

In der α -Ebene lautet der Zusammenhang

$$\begin{aligned}q(\alpha) &= w(\alpha) * \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{-2|\alpha - \alpha'|^2} w(\alpha') \, d\lambda(\alpha').\end{aligned}\tag{4.27}$$

Beweis: Vergleicht man

$$\tilde{\chi}^A(\xi, \eta) := \operatorname{tr} \left\{ e^{i\xi Q + i\eta P} \cdot e^{-\frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2)} \varrho \right\}\tag{4.28}$$

mit

$$\tilde{\chi}^S(\xi, \eta) := \operatorname{tr} \left\{ e^{i\xi Q + i\eta P} \varrho \right\},\tag{4.29}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}^A(\xi, \eta) &= \tilde{\chi}^S(\xi, \eta) \cdot e^{-\frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2)} \\
\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \tilde{\chi}^A(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \tilde{\chi}^S(\xi, \eta) \cdot e^{-\frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2)} \, d\xi \, d\eta \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \tilde{\chi}^S(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \\
&\quad * \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} e^{-\frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2)} \, d\xi \, d\eta \\
\tilde{q}(x, y) &= \tilde{w}(x, y) * \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} e^{-\frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2)} \, d\xi \, d\eta \\
\tilde{q}(x, y) &= \tilde{w}(x, y) * \frac{1}{\pi} e^{-(x^2 + y^2)}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Dies ist der Zusammenhang im Phasenraum. Transformiert man (4.30) vom Phasenraum in die α -Ebene, so erhält man

$$\begin{aligned}
q(\alpha) &= 2 \tilde{q} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \bar{\alpha}), \frac{1}{i\sqrt{2}}(\alpha - \bar{\alpha}) \right) \\
&= 2 \left(\tilde{w} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \bar{\alpha}), \frac{1}{i\sqrt{2}}(\alpha - \bar{\alpha}) \right) * \frac{1}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} \right) \\
&= 2 \left(w(\alpha) * \frac{1}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} \right) \\
&= w(\alpha) * \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Also wird die Wigner-Funktion in beiden Darstellungen mit einer Gauß-Funktion gefaltet, um die Q-Funktion zu erhalten. Dabei handelt es sich um dieselbe Gauß-Funktion wie beim Zusammenhang zwischen Wigner- und P-Funktion. ■

4.3.6 Zusammenhang zwischen Q- und P-Funktion: Man kommt von der P- zur Wigner-Funktion durch Faltung mit einer Gauß-Funktion und von der Wigner- zur Q-Funktion durch Faltung mit derselben Gauß-Funktion. Also müßte man auch direkt von der P- zur Q-Funktion durch Faltung mit einer Gauß-Funktion doppelter Breite kommen:

Im Phasenraum bedeutet dies

$$\begin{aligned}
\tilde{q}(x, y) &= \tilde{p}(x, y) * \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}((x-x')^2 + (y-y')^2)} \tilde{p}(x', y') \, dx' \, dy'.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

In der α -Ebene lautet der Zusammenhang

$$\begin{aligned} q(\alpha) &= p(\alpha) * \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha|^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{-|\alpha-\alpha'|^2} p(\alpha') d\lambda(\alpha'). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Dies gilt aufgrund ähnlicher Überlegungen wie beim Zusammenhang zwischen Q- und Wigner-Funktion:

Beweis: Man vergleicht

$$\tilde{\chi}^A(\xi, \eta) := \text{tr} \left\{ e^{i\xi Q + i\eta P} \cdot e^{-\frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2)} \varrho \right\} \quad (4.34)$$

mit

$$\tilde{\chi}^N(\xi, \eta) := \text{tr} \left\{ e^{i\xi Q + i\eta P} \cdot e^{\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)} \varrho \right\} \quad (4.35)$$

und erhält

$$\tilde{\chi}^A(\xi, \eta) = \tilde{\chi}^N(\xi, \eta) \cdot e^{-\frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2)}.$$

Dies formt man folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \tilde{\chi}^A(\xi, \eta) d\xi d\eta &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \tilde{\chi}^N(\xi, \eta) \cdot e^{-\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)} d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \tilde{\chi}^N(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &\quad * \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} e^{-\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)} d\xi d\eta \\ \tilde{q}(x, y) &= \tilde{p}(x, y) * \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} e^{-\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)} d\xi d\eta \\ \tilde{q}(x, y) &= \tilde{p}(x, y) * \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Um nun noch den Zusammenhang in der α -Ebene herzuleiten, wird (4.36) vom Phasenraum in die α -Ebene transformiert:

$$\begin{aligned} q(\alpha) &= 2\tilde{q} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \bar{\alpha}), \frac{1}{i\sqrt{2}}(\alpha - \bar{\alpha}) \right) \\ &= 2 \left(\tilde{p} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \bar{\alpha}), \frac{1}{i\sqrt{2}}(\alpha - \bar{\alpha}) \right) * \frac{1}{2\pi} e^{-|\alpha|^2} \right) \\ &= 2 \left(p(\alpha) * \frac{1}{2\pi} e^{-|\alpha|^2} \right) \\ &= p(\alpha) * \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha|^2}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Die Q-Darstellung entsteht also aus der P-Funktion durch Faltung mit einer Gauß-Funktion. Sie besitzt die doppelte Varianz der Gauß-Funktion, die beim Zusammenhang zwischen Q- und Wigner-Funktion benutzt wird. ■

Die Zusammenhänge zwischen den Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilungen p , q und w durch Faltungen mit Gauß-Funktionen unterschiedlicher Varianzen sind in Abbildung 4.1 nocheinmal zusammengefaßt.

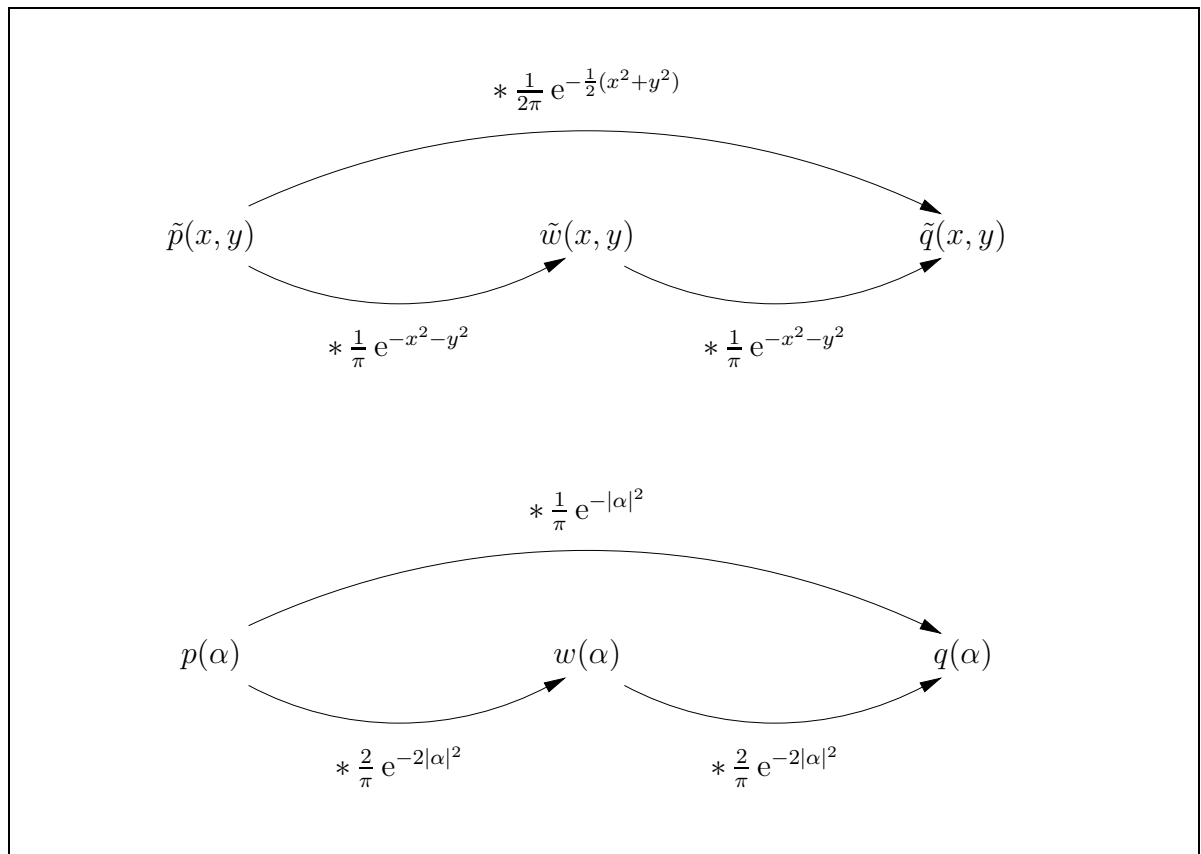


Abbildung 4.1: Zusammenhang von P-, Wigner- und Q-Funktion mittels Faltung

4.4 Beispiele

4.4.1 Gibbs-Zustand: Um die Q-Funktion zum Gibbs-Zustand

$$\varrho(\beta) = (1 - e^{-\beta}) \begin{pmatrix} e^{-\beta} & & & & \\ & e^{-2\beta} & & & \\ & & e^{-3\beta} & & \\ & & & e^{-4\beta} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

zu berechnen, können wir wiederum auf die schon berechnete P-Funktion

$$\tilde{p}(x, y) = \frac{1}{\pi} (e^\beta - 1) \exp \left\{ - (e^\beta - 1) (x^2 + y^2) \right\} \quad (4.39)$$

zurückgreifen, indem wir die Beziehung zwischen Q- und P-Funktion aus Gleichung (4.32) verwenden:

$$\begin{aligned} \tilde{q}(x, y) &= \tilde{p}(x, y) * \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}((x-x')^2+(y-y')^2)} \tilde{p}(x', y') \, dx' \, dy'. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \tilde{q}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}((x-x')^2+(y-y')^2)} \frac{1}{\pi} (e^\beta - 1) e^{-(e^\beta-1)(x'^2+y'^2)} \, dx' \, dy' \\ &= \frac{1}{2\pi^2} (e^\beta - 1) \int_{\mathbb{R}^2} e^{-((x-x')^2+(y-y')^2)} e^{-(e^\beta-1)(x'^2+y'^2)} \, dx' \, dy' \\ &= \frac{1}{2\pi} (1 - e^{-\beta}) e^{-\frac{1}{2}(1-e^{-\beta})(x^2+y^2)}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Die Q-Funktion des Gibbs-Zustandes, wie sie in Abbildung 4.2 zu sehen ist, hat also eine ähnliche Gestalt wie die zugehörige P-Funktion, nämlich eine Gauß-Verteilung mit einer doppelt so großen Varianz.

4.4.2 Gequetschter Zustand (squeezed state): Die Q-Funktion zum gequetschten Zustand mit Parameter κ lautet (SCULLY UND ZUBRAIRY [81]):

$$q(x, y) = \frac{1}{4\pi^2 \cosh \kappa} \exp \left(-\frac{1}{2}(1 - 2\sqrt{2})^2 ((e^{-2\kappa} + 1)x^2 + (e^{2\kappa} + 1)y^2) \right) \quad (4.42)$$

Die Q-Funktion eines gequetschten Zustandes zum Parameter $\kappa = 1$ ist in Abbildung 4.3 zu sehen.

4.4.3 Teilchenzahl-Zustand: Die Q-Funktion zum n -ten Teilchenzahl-Zustand $|n\rangle \langle n|$ lautet (WALLS UND MILBURN [82]):

$$q(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^n e^{-(x^2+y^2)}}{\pi n!}. \quad (4.43)$$

Die Q-Funktion des Teilchenzahl-Zustandes $|4\rangle \langle 4|$ ist in Abbildung 4.4 zu sehen; in der

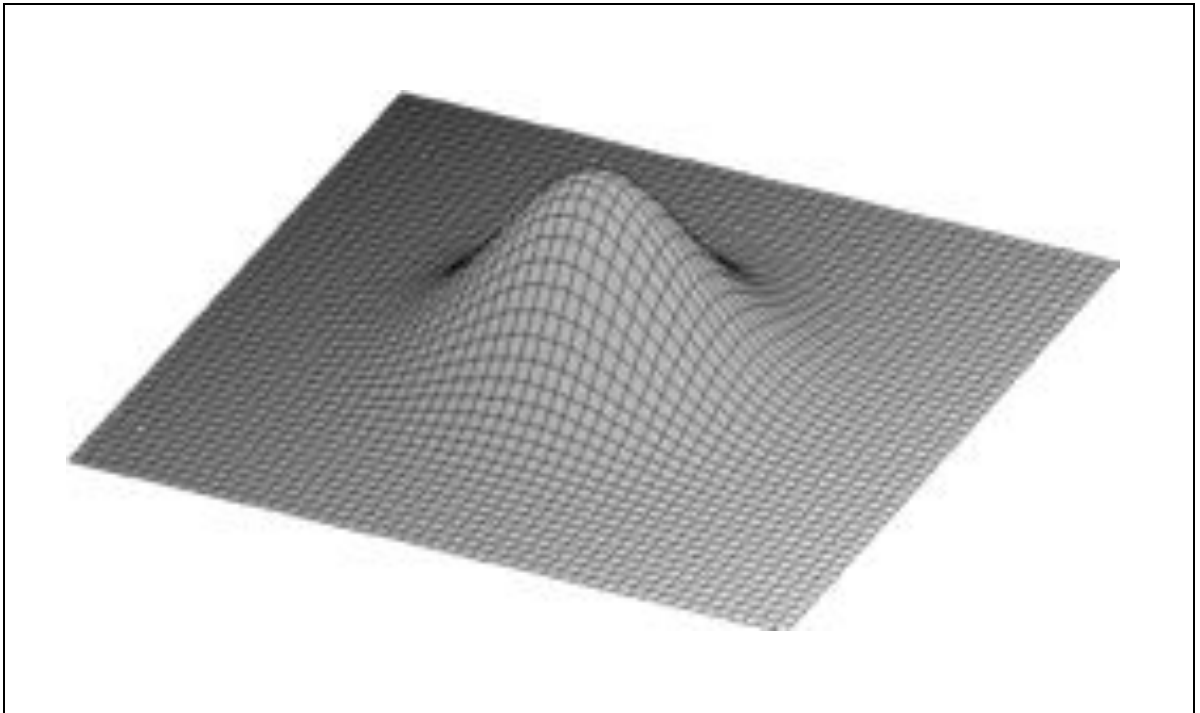


Abbildung 4.2: Q-Funktion des Gibbs-Zustandes

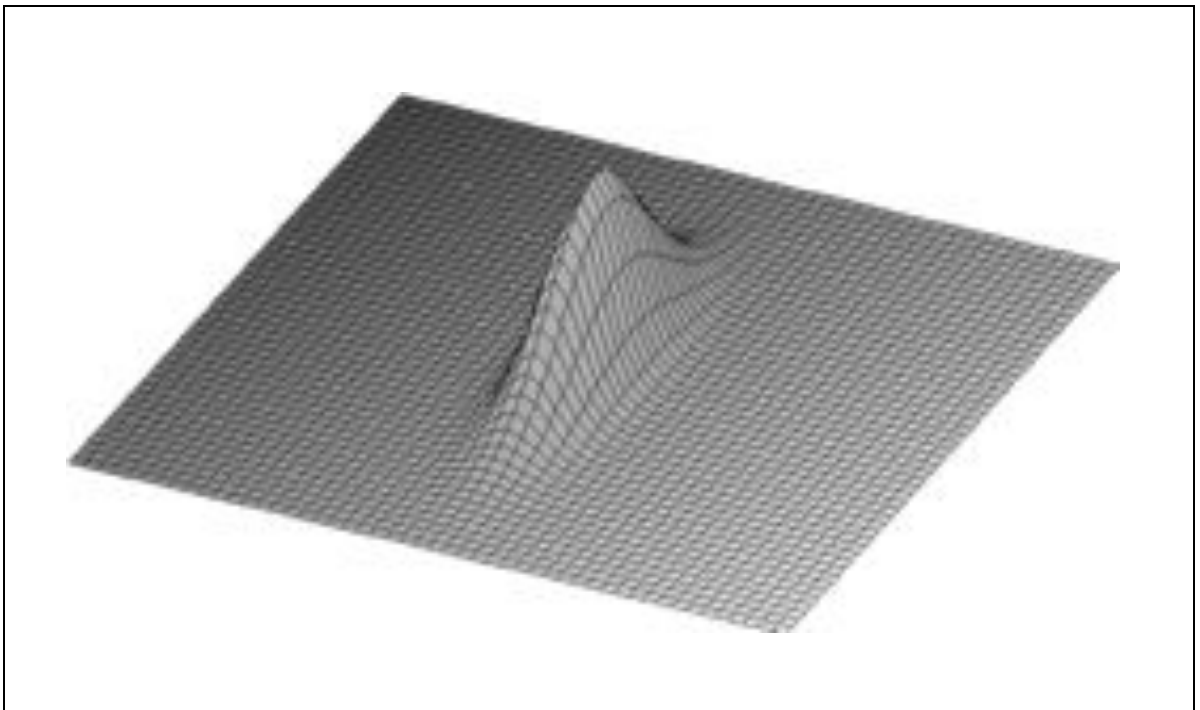


Abbildung 4.3: Q-Funktion eines gequetschten Zustandes ($\kappa = 1$)

Ansicht von unten ist dabei die Nichtnegativität der Q-Funktion deutlich zu erkennen.

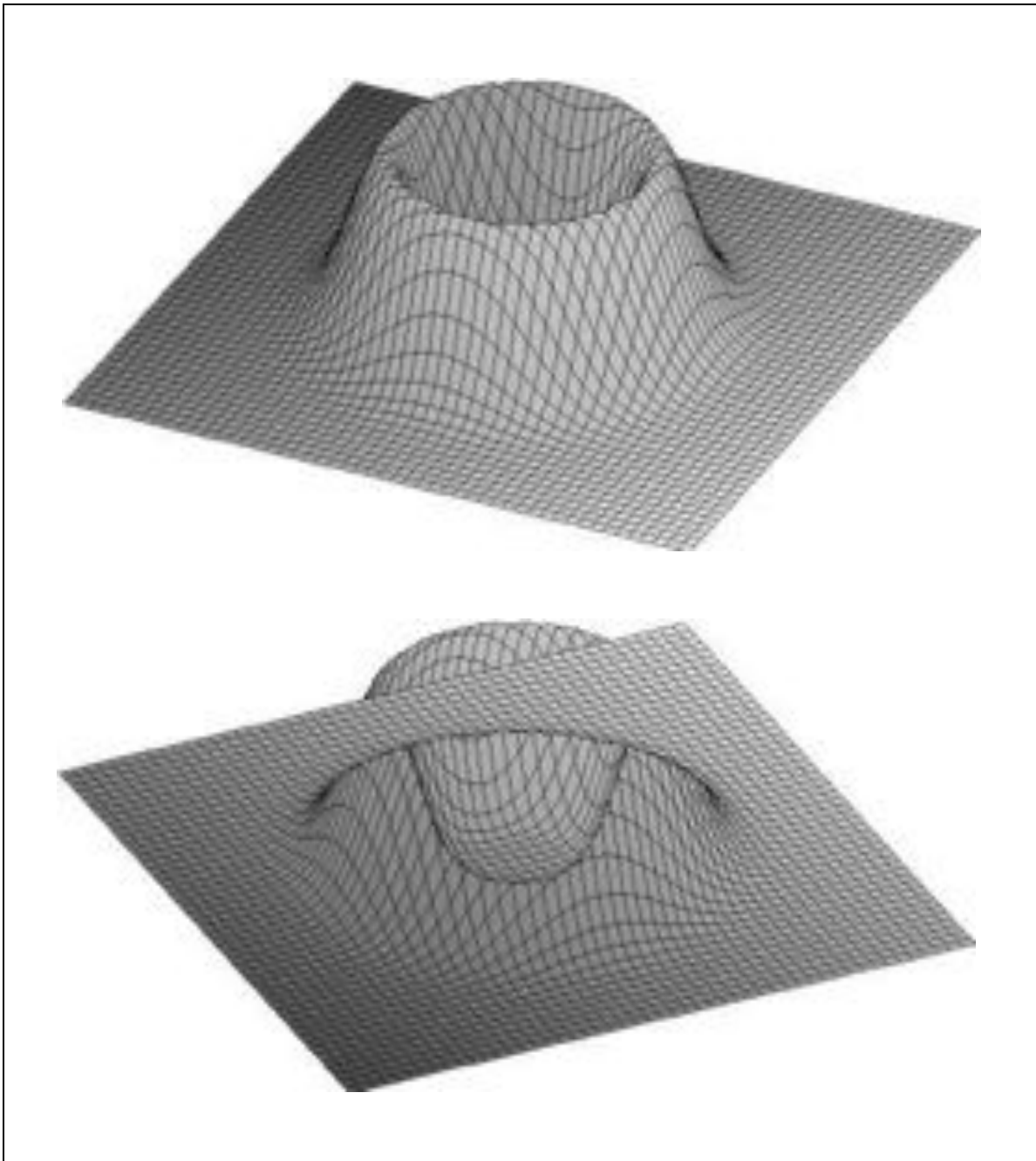


Abbildung 4.4: Q-Funktion des Teilchenzahl-Zustandes $|4\rangle$ $\langle 4|$ von oben und von unten betrachtet

Kapitel 5

Verallgemeinerte Darstellung

Die drei Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilungen p, w und q ließen sich mittels quantencharakteristischer Funktion auf ziemlich ähnliche Art und Weise definieren. Wir werden im folgenden eine verallgemeinerte Darstellung entwickeln, die die P-, Wigner- und Q-Darstellungen als Spezialfälle enthält. Danach werden wir diese Darstellung noch erweitern, damit sie auch noch die sogenannte *Husimi-Darstellung* umfaßt.

Solche verallgemeinerten Darstellungen finden sich z. B. in CAHILL UND GLAUBER [60] und in LEE [74], der bei der gesamten Darstellung des Themas von einer allgemeinen Form ausgeht.

5.1 Definition und Eigenschaften

5.1.1 Definition: Es seien ϱ ein klassischer Zustand, Q der Orts- und P der Impulsoperator auf $\mathcal{F}_+(\mathbb{C})$. Dann heißt für $\xi, \eta, t \in \mathbb{R}$

$$\tilde{\chi}_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (\xi, \eta) \mapsto \tilde{\chi}_t(\xi, \eta) := \text{tr} \left\{ e^{i\xi Q + i\eta P} \cdot e^{-\frac{1}{4}(t-1)(\xi^2 + \eta^2)} \varrho \right\} \quad (5.1)$$

die *verallgemeinerte quantencharakteristische Funktion* zum Zustand ϱ .

Die *verallgemeinerte Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilung* $\tilde{f}_t(x, y)$ wird wie bisher auch als Fouriertransformierte der quantencharakteristischen Funktion definiert:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_t(x, y) &:= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \tilde{\chi}_t(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \text{tr} \left\{ e^{i\xi Q + i\eta P} \cdot e^{-\frac{1}{4}(t-1)(\xi^2 + \eta^2)} \varrho \right\} \, d\xi \, d\eta. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Umgekehrt gilt

$$\tilde{\chi}_t(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\xi q + \eta p)} \tilde{f}_t(x, y) \, dx \, dy. \quad (5.3)$$

Die P-, Wigner- und Q-Funktionen ergeben sich in dieser verallgemeinerten Darstellung für spezielle Werte des Parameters t :

$$t = 0 : \quad \tilde{f}_0(x, y) = \tilde{p}(x, y) \quad (5.4)$$

$$t = 1 : \quad \tilde{f}_1(x, y) = \tilde{w}(x, y) \quad (5.5)$$

$$t = 2 : \quad \tilde{f}_2(x, y) = \tilde{q}(x, y). \quad (5.6)$$

5.1.2 Unterschied zur Physik: Wenn sich physikalische Texte mit einer verallgemeinerten Darstellung beschäftigen, so wird diese meist so gewählt, daß die Q-Funktion zum Parameter -1 , die Wigner-Funktion zum Parameter 0 und die P-Funktion zum Parameter $+1$ gehört. Allerdings wird dadurch der Zusammenhang zwischen den Funktionen durch Faltung, um den es im nächsten Abschnitt geht, nicht so klar ersichtlich.

5.1.3 Zusammenhang zwischen den Funktionen: Wir haben in den vorhergehenden Kapiteln gesehen, daß die P-, Wigner- und Q-Funktionen über Faltungen mit bestimmten, zweidimensionalen Gauß-Funktionen zusammenhängen. Auch bei der verallgemeinerten Darstellung gilt dieser Zusammenhang: Aus einer gegebenen Funktion $\tilde{f}_s(x, y)$ kann man die Funktion $\tilde{f}_t(x, y)$ mit $s < t$ durch eine Faltung mit einer Gauß-Funktion berechnen. In Formeln bedeutet dies

$$\begin{aligned} \tilde{f}_t(x, y) &= \tilde{f}_s(x, y) * \frac{1}{(t-s)\pi} e^{-\frac{1}{t-s}(x^2+y^2)} \\ &= \frac{1}{(t-s)\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{t-s}((x-x')^2+(y-y')^2)} \tilde{f}_s(x', y') \, dx' \, dy'. \end{aligned} \quad (5.7)$$

In der α -Ebene lautet der Zusammenhang

$$\begin{aligned} f_t(\alpha) &= f_s(\alpha) * \frac{2}{(t-s)\pi} e^{-\frac{2}{t-s}|\alpha|^2} \\ &= \frac{2}{(t-s)\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{2}{t-s}|\alpha-\alpha'|^2} f_s(\alpha') \, d\lambda(\alpha'). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Der Zusammenhang zwischen den verallgemeinerten Funktionen ist in Abbildung 5.1 graphisch veranschaulicht.

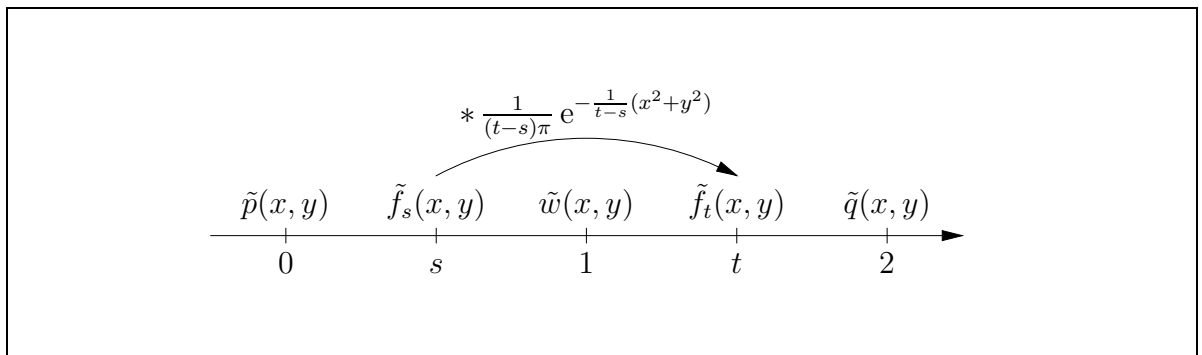


Abbildung 5.1: Zusammenhang zwischen den verallgemeinerten Funktionen

5.1.4 Analogie zur Wärmeleitungsgleichung: Wenn man sich ein Bild von der verallgemeinerten Darstellung und dem Zusammenhang mittels Faltung machen möchte, kann man sich die Analogie zur Wärmeleitungsgleichung klarmachen: Man kann sich die verallgemeinerte Funktion $\tilde{f}_t(x, y)$ als zweidimensionale Wärmeverteilung vorstellen. Sie erfüllt die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial \tilde{f}_t(x, y)}{\partial t} = -\frac{1}{8} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tilde{f}_t(x, y). \quad (5.9)$$

Dies ist eine Form einer Wärmeleitungsgleichung, in der $\tilde{f}_t(x, y)$ die Rolle der Temperatur am Punkt (x, y) zur Zeit t spielt. Die Faltung aus Gleichung (5.7),

$$\tilde{f}_t(x, y) = \tilde{f}_s(x, y) * \frac{1}{(t-s)\pi} e^{-\frac{1}{t-s}(x^2+y^2)}, \quad (5.10)$$

beschreibt die Wärmeverteilung zum Zeitpunkt t bei vorgegebener Wärmeverteilung zu einem früheren Zeitpunkt s .

Nun ist auch klar, weshalb sich die Q-Funktion viel gemäßiger verhält als die P-Funktion: Die Singularitäten der P-Funktion werden, ebenso wie extreme Temperaturverteilungen, durch Faltung geglättet. Bei der Wärmeleitung muß man dazu einfach warten, bei den Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilungen muß man zu einer Funktion mit einem größeren Parameter t übergehen.

Die Normiertheit und Positivität einer Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilung bedeutet im Bild der Wärmeleitungsgleichung, daß eine positive Wärme der Menge 1 auf der Ebene verteilt ist. Da sowohl die Positivität als auch die Wärmemenge 1 zu jedem späteren Zeitpunkt erhalten bleiben, gilt diese Aussage auch für die Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

5.1.5 Unterschied zur Physik: Wählt man, wie in den meisten physikalischen Texten, die verallgemeinerte Darstellung so, daß die Q-Funktion zum Parameter -1 , die Wigner-Funktion zum Parameter 0 und die P-Funktion zum Wert $+1$ gehört, so ist die Analogie zur Wärmeleitungsgleichung etwas seltsam: Hier gehört der Parameter t der Funktion $\tilde{f}_t(x, y)$ zur „negativen“ Zeit der Wärmeleitungsgleichung. Um dieses zu vermeiden, haben wir die verallgemeinerte Darstellung anders definiert.

5.2 Verallgemeinerte Darstellung in der α -Ebene

Um von den oben entwickelten Formeln im Phasenraum auf Formeln in der komplexen α -Ebene zu kommen, müssen wieder die üblichen Transformationen durchgeführt werden. Dies liefert die *verallgemeinerte quantencharakteristische Funktion* zum Zustand ϱ in der α -Ebene:

$$\chi_t(z) := \text{tr} \left\{ e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{-\frac{1}{2}(t-1)|z|^2} \varrho \right\}. \quad (5.11)$$

Die verallgemeinerte Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilung $f_t(\alpha)$ lautet somit

$$\begin{aligned} f_t(\alpha) &:= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \chi_t(z) \, d\lambda(z) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}\alpha - z\bar{\alpha}} \operatorname{tr} \left\{ e^{zA^* - \bar{z}A} \cdot e^{-\frac{1}{2}(t-1)|z|^2} \varrho \right\} \, d\lambda(z). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Umgekehrt gilt:

$$\chi_t(z) = \int_{\mathbb{C}} e^{z\bar{\alpha} - \bar{z}\alpha} f_t(\alpha) \, d\lambda(\alpha). \quad (5.13)$$

Für P-, Wigner- und Q-Funktionen gelten dieselben Parameter t wie oben:

$$t = 0: \quad f_0(\alpha) = p(\alpha); \quad (5.14)$$

$$t = 1: \quad f_1(\alpha) = w(\alpha); \quad (5.15)$$

$$t = 2: \quad f_2(\alpha) = q(\alpha). \quad (5.16)$$

Aus einer gegebenen Funktion $f_s(\alpha)$ kann man die Funktion $f_t(\alpha)$ mit $s < t$ durch folgende Faltung berechnen:

$$\begin{aligned} f_t(\alpha) &= f_s(\alpha) * \frac{2}{(t-s)\pi} e^{-\frac{2}{t-s}|\alpha|^2} \\ &= \frac{2}{(t-s)\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{2}{t-s}|\alpha-\alpha'|^2} f_t(\alpha') \, d\lambda(\alpha'). \end{aligned} \quad (5.17)$$

5.3 Noch allgemeiner (Husimi-Darstellung)

Die *Husimi-Funktion* $\tilde{h}_\kappa(x, y)$ ist eine verallgemeinerte Q-Funktion. Sie entsteht dadurch, daß man die Wigner-Funktion mit einer Gauß-Glocke faltet, die in x - und y -Richtung unterschiedliche Varianzen besitzt. Die unterschiedliche Varianz wird durch eine Variable $\kappa \in \mathbb{R}$ gesteuert:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_\kappa(x, y) &= \tilde{w}(x, y) * \frac{1}{\pi} e^{-(x^2/\kappa + y^2\kappa)} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-((x-x')^2/\kappa + (y-y')^2\kappa)} \tilde{w}(x', y') \, dx' dy'. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Daher ist die Husimi-Darstellung immer dann von Vorteil, wenn man gequetschte Zustände (squeezed states) untersucht. Ein Beispiel hierfür findet man in APPLEBY [56]. Wir werden nun die verallgemeinerte Darstellung so erweitern, daß man mit ihr auch noch die Husimi-Funktion beschreiben kann.

5.3.1 Definition: Es seien ρ ein klassischer Zustand, Q der Orts- und P der Impulsoperator auf $\mathcal{F}_+(\mathbb{C})$. Dann heißt für $\xi, \eta, t, \kappa \in \mathbb{R}$

$$\tilde{\chi}_{t,\kappa} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (\xi, \eta) \mapsto \tilde{\chi}_{t,\kappa}(\xi, \eta) := \text{tr} \left\{ e^{i\xi Q + i\eta P} \cdot e^{-\frac{1}{4}(t-1)(\xi^2/\kappa + \eta^2\kappa)} \rho \right\} \quad (5.19)$$

die *verallgemeinerte quantencharakteristische Funktion* zum Zustand ρ .

Die *verallgemeinerte Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilung* $\tilde{f}_{t,\kappa}(x, y)$ wird wie bisher auch als Fouriertransformierte der quantencharakteristischen Funktion definiert:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{t,\kappa}(x, y) &:= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \tilde{\chi}_{t,\kappa}(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \text{tr} \left\{ e^{i\xi Q + i\eta P} \cdot e^{-\frac{1}{4}(t-1)(\xi^2/\kappa + \eta^2\kappa)} \rho \right\} \, d\xi \, d\eta. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Umgekehrt gilt

$$\tilde{\chi}_{t,\kappa}(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\xi q + \eta p)} \tilde{f}_{t,\kappa}(x, y) \, dx \, dy. \quad (5.21)$$

Die P-, Wigner- und Q-Funktionen ergeben sich in dieser verallgemeinerten Darstellung für spezielle Werte des Parameters t :

$$t = 0, \kappa = 1 : \quad \tilde{f}_{0,1}(x, y) = \tilde{p}(x, y); \quad (5.22)$$

$$t = 1, \kappa = 1 : \quad \tilde{f}_{1,1}(x, y) = \tilde{w}(x, y); \quad (5.23)$$

$$t = 2, \kappa = 1 : \quad \tilde{f}_{2,1}(x, y) = \tilde{q}(x, y). \quad (5.24)$$

Für die Husimi-Funktion $\tilde{h}_\kappa(x, y)$ als verallgemeinerte Q-Funktion setzt man also $t = 1$ und läßt κ beliebig:

$$t = -1, \kappa \in \mathbb{R} : \quad \tilde{f}_{2,\kappa}(x, y) = \tilde{h}_\kappa(x, y). \quad (5.25)$$

Literaturverzeichnis

Mathematische Grundlagen:

- [1] BLANK, J., EXNER, P., HAVLÍČEK, M.: *Hilbert space operators in quantum physics*. New York: American Institute of Physics, 1994.
- [2] BÖHRINGER, M.: *Klassische Zustände*. Seminar: Modelle in der Operatoralgebraischen Vielteilchenphysik, Universität Tübingen, 1988.
- [3] BRATTELI, O., ROBINSON, D. W.: *Operator algebras and quantum statistical mechanics*. Berlin: Springer, 1996.
- [4] BRONSTEIN, I. N., SEMENDJAJEW, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. Thun: Harri Deutsch, 1981.
- [5] COHEN, L.: Can quantum mechanics be formulated as a classical probability theory? – *Phil. of Science* 33, 317 (1966).
- [6] COOK, J. M.: The mathematics of second quantization. – *Trans. Amer. Math. Soc.* 74, 222–245 (1953).
- [7] DAVIES, E. B.: *Quantum theory of open systems*. New York: Academic Press, 1976.
- [8] DAVIES, E. B.: *One-parameter semigroups*. New York: Academic Press, 1980.
- [9] KHINCHIN, A. Y.: *Mathematical foundations of quantum statistics*. New York: Dover Publications, 1998.
- [10] KÜMMERER, B.: *Mathematische Grundlagen der Quantenstatistischen Mechanik*. Vorlesungsskriptum, Universität Tübingen, 1988.
- [11] KÜMMERER, B.: *Funktionalanalysis*. Vorlesungsskriptum, Universität Stuttgart, 1997.
- [12] KÜMMERER, B.: *Lineare Operatoren auf Hilberträumen*. Vorlesungsskriptum, Universität Stuttgart, 1997.

- [13] KÜMMERER, B.: *Operatoralgebren*. Vorlesungsskriptum, Universität Stuttgart, 1998.
- [14] KÜMMERER, B.: *Positiv-Definitheit*. Seminar, Universität Stuttgart, 1998.
- [15] KÜMMERER, B., MAASSEN, H.: Elements of quantum probability. – *Quantum Probability Communications X*, Singapore: World Scientific, 1998
- [16] LANDSMAN, N. P.: *Lecture notes on C^* -algebras, Hilbert C^* -modules, and quantum mechanics*. E-Print: <http://xxx.lanl.gov/abs/math-ph/9807030>, 1998.
- [17] LANDSMAN, N. P.: *Mathematical topics between classical and quantum mechanics*. Berlin: Springer, 1998.
- [18] LERNER, E. C., HUANG, H. W., WALTERS, G. E.: Some mathematical properties of oscillator phase operators. – *J. Math. Phys.* 11, 1679 (1970).
- [19] MACKEY, G. W.: *Mathematical foundations of quantum mechanics*. U.S.A.: Benjamin, 1963.
- [20] MARLOW, A. R. (Hrsg.): *Mathematical foundations of quantum theory*. New York: Academic Press, 1978.
- [21] MOYAL, J. E.: Quantum mechanics as a statistical theory. – *Proc. Camb. Phil. Soc.* 45, 99 (1949).
- [22] VON NEUMANN, J.: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Berlin: Springer, 1996.
- [23] PARTHASARATHY, K. R.: *An introduction to quantum stochastic calculus*. Basel: Birkhäuser, 1992.
- [24] PETRINA, D. YA.: *Mathematical foundations of quantum statistical mechanics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [25] PETZ, D.: *An invitation to the algebra of canonical commutation relations*. Leuven: Leuven University Press, 1990.
- [26] REED, M., SIMON, B.: *Methods of modern mathematical physics*. New York: Academic Press, 1980.
- [27] RICHARDS, I., HEEKYUNG, Y.: *Theory of distributions: a non-technical introduction*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [28] RIESZ, F., SZÖKEFALVI-NAGY, B.: *Functional analysis*. New York: Dover Publications, 1990.

- [29] RUEFF, A.: *Ein einheitlicher Zugang zur Algebra der kanonischen Vertauschungsrelationen in der Quantenmechanik*. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 1999.
- [30] TAKESAKI, M.: *Theory of operator algebras I*. New York: Springer, 1979.
- [31] WALTER, W.: *Einführung in die Theorie der Distributionen*. Zürich: Bibliographisches Institut, 1974.
- [32] WEIDMANN, J.: *Linear operators in Hilbert spaces*. New York: Springer, 1980.

Physikalische Grundlagen:

- [33] BERTOLOTTI, M.: *Masers and lasers. An historical approach*. Bristol: Adam Hill, 1983.
- [34] BÜRK, E.: *Der Phasenbegriff in der Quantenoptik*. Diplomarbeit, Universität Tübingen, 1997.
- [35] COHEN-TANNOUJDI, C.: *Quantum mechanics*. London: Academic Press, 1977.
- [36] FAIRLIE, D. B.: The formulation of quantum mechanics in terms of phase space methods. – *Proc. Camb. Phil. Soc.* 60, 581 (1964).
- [37] FEYNMAN, R. P.: Concept of probability in quantum mechanics. – *Proc. 2nd Berkeley symposium on mathematical statistics and probability*, 533–541 (1951).
- [38] FEYNMAN, R. P.: *The Feynman lectures on physics, Volume III (Quantum mechanics)*. Reading: Addison-Wesley, 1965.
- [39] FEYNMAN, R. P.: *Negative probability*. In HILEY UND PEAT [42], 1987.
- [40] FOCK, W. A.: Konfigurationsraum und zweite Quantelung. – *Zschr. für Phys.* 75, 622 (1932).
- [41] HAAG, R.: *Local quantum physics*. Berlin: Springer, 1996.
- [42] HILEY, B. J., PEAT, F. D.: *Quantum implications: essays in honour of David Bohm*. London: Routledge and Kegan Paul, 1987.
- [43] HONEGGER, R., RIECKERS, A.: Squeezed variances of smeared boson fields. – *Helv. Phys. Acta* 70, 507–541 (1997).
- [44] HONEGGER, R., RIECKERS, A.: Squeezing of optical states on the CCR-algebra. – *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 33, 869–892 (1997).
- [45] JAUCH, J. M.: *Foundations of quantum mechanics*. Reading: Addison-Wesley, 1973.

- [46] KLAUDER, J. R.: Exponential Hilbert space, Fock space revisited. – *J. Math. Phys.* 11, 609 (1970).
- [47] LEONHARDT, ULF: *Measuring the quantum state of light*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [48] LUISELL, W. H.: Amplitude and phase uncertainty relations. – *Phys. Lett.* 7, 60 (1963).
- [49] OMNÈS, R.: *The interpretation of quantum mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1994.
- [50] PAULI, W.: The connection between spin and statistics. – *Phys. Rev.* 58, 716 (1940).
- [51] SCHLEICH, W. P., KRÄHMER, D. S., MAYR, E.: *Quantum optics in phase space*. Weinheim: VCH, 1997.
- [52] SCHUBERT, M., WEBER, G.: *Quantentheorie*. Heidelberg: Spektrum, 1993.
- [53] UHLHORN, U.: On the connection between transformations in classical mechanics and in quantum mechanics and the phase space representation of quantum mechanics. – *Arkiv för Fysik* 11, 87 (1956).
- [54] WANNIER, C.: *Statistical physics*. New York: Dover, 1987.
- [55] WERNER, R.: Quantum harmonic analysis on phase-space. – *J. Math. Phys.* 25, 1404–1411 (1984).

P-, Wigner-, Q- und Husimi-Darstellungen:

- [56] APPLEBY, D. M.: *Generalised Husimi functions: analyticity and interpretation*. E-Print: <http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9805054>, 1998.
- [57] BERRY, M. V.: Semiclassical mechanics in phase space: a study of Wigner's function. – *Phil. Trans. R. Soc. A.* 287, 237 (1977).
- [58] BRÖCKER, T., WERNER, R. F.: Mixed states with positive Wigner functions. – *J. Math. Phys.* 36, 62–75 (1995).
- [59] CAHILL, K. H., GLAUBER, R. J.: Ordered expansions in boson amplitude operators. – *Phys. Rev.* 177, 1857–1881 (1968).
- [60] CAHILL, K. H., GLAUBER, R. J.: Density operators and quasiprobability distributions. – *Phys. Rev.* 177, 1882–1902 (1968).

- [61] CARMICHAEL, H.: *Statistical methods in quantum optics*. Berlin: Springer, 1999.
- [62] DEWITT, C., BLANDIN, A., COHEN-TANNOUDJI, C. (Hrsg.): *Quantum optics and electronics*. New York: Gordon and Breach, 1964.
- [63] GARDINER, C. W.: *Quantum noise*. Berlin: Springer, 1991.
- [64] GARRAWAY, B. M., KNIGHT, P. L.: Quantum phase distribution and quasidistribution. – *Phys. Rev. A* 46, 5346 (1992).
- [65] GARRAWAY, B. M., KNIGHT, P. L.: Quantum superpositions, phase distributions and quasiprobabilities. – *Phys. Scr. T* 48, 66 (1993).
- [66] GLAUBER, R. J.: Photon correlations. – *Phys. Rev. Letters* 10, 84 (1962).
- [67] GLAUBER, R. J.: Coherent and incoherent states of the radiation field. – *Phys. Rev.* 131, 2766–2788 (1963).
- [68] HILLERY, M., O’CONNELL, R. F., SCULLY, M. O., WIGNER, E. P.: Distribution functions in physics: fundamentals. – *Phys. Rep.* 106, 121–167 (1984).
- [69] HUDSON, R.: When is the Wigner quasi-probability density non-negative? – *Rep. Math. Phys.* 6, 249–252 (1974).
- [70] HUG, M.: *A modified spectral method in phase space: calculation of the Wigner function*. München: Herbert Utz Verlag, 1997.
- [71] KIM, M. S., ANTESBERGER, G., BODENDORF, C. T., WALTHER, H.: Scheme for direct observation of the Wigner characteristic function in cavity QED – *Phys. Rev. A* 58 (1998).
- [72] KLAUDER, J. R., MCKENNA, J., CURRIE, D. G.: On diagonal coherent-state representations for quantum-mechanical density matrices. – *J. Math. Phys.* 6, 734 (1965).
- [73] KLAUDER, J. R., SUDARSHAN, E. C. G.: *Fundamentals of quantum optics*. New York: Benjamin, 1968.
- [74] LEE, H.-W.: Theory and application of the quantum phase-space distribution functions. – *Phys. Rep.* 259, 147 (1995).
- [75] LÜTKENHAUS, N., BARNETT, S. M.: Degree of nonclassical behaviour. – *Quantum Communications and Measurement*. New York: Plenum Press, 1995.
- [76] LÜTKENHAUS, N., BARNETT, S. M.: Nonclassical effects in phase space. – *Phys. Rev. A* 51, 3340 (1995).

- [77] LUISELL, W. H.: *Quantum statistical properties of radiation*. New York: Wiley-Interscience, 1973.
- [78] MAHLER, M.: *Dissipative Zeitentwicklungen mit Hilfe von Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilungen in der Quantenmechanik*. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 1999.
- [79] SCHROECK, F. E.: *Quantum mechanics on phase space*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [80] SUDARSHAN, E. C. G.: Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. – *Phys. Rev. Letters* 10, 277–279 (1963).
- [81] SCULLY, M. O., ZUBAIRY, M. S.: *Quantum optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [82] WALLS, D. F., MILBURN, G. J.: *Quantum optics*. Berlin: Springer, 1994.
- [83] WIGNER, E. P.: On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. – *Phys. Rev.* 40, 749–759 (1932).